المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum
Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

11

إجابات كتاب الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

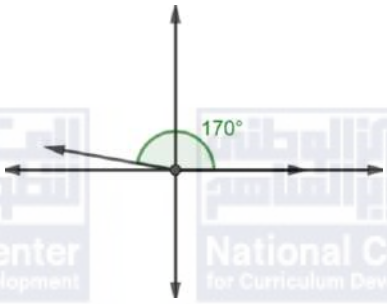
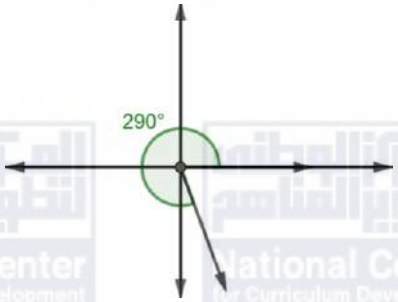
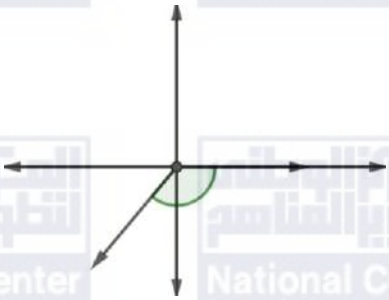
06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

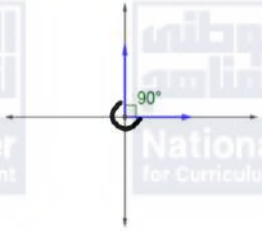
إجابات كتاب الطالب الصف الحادي عشر -المسار الأكاديمي- خطة جديدة الفصل الدراسي الثاني

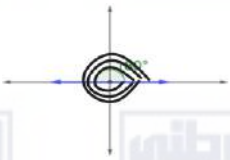
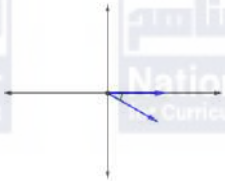
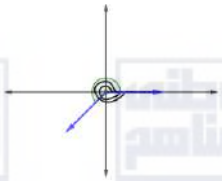
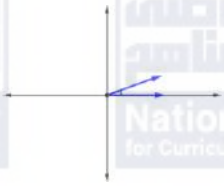
الوحدة الرابعة: الاقترانات المثلثية

الدرس الأول: قياس الزاوية بالراديان

أتحقق من فهمي صفحة 9	
a	
b	
c	

أتحقق من فهمي صفحة 10	
a	$165° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{11\pi}{12}$
b	$\frac{5\pi}{4} \times \frac{180°}{\pi} = 225°$
c	$-80° \times \frac{\pi}{180°} = -\frac{4\pi}{9}$
d	$-6 \times \frac{180°}{\pi} = -\frac{1080°}{\pi}$

أتحقق من فهمي صفحة 12	
a	$88° + 360°(1) = 448°$ $88° + 360°(-1) = -272°$
b	$-920° + 360°(2) = -200°$ $-920° + 360°(3) = 160°$
c	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi(1) = \frac{8\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi(-1) = -\frac{4\pi}{3}$
d	$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi(1) = \frac{5\pi}{4}$ $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi(-1) = -\frac{11\pi}{4}$
أتحقق من فهمي صفحة 14	
	$\theta = 50° = 50°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{5\pi}{18}$ $l = r\theta = 9 \times \frac{5\pi}{18} = \frac{5\pi}{2} \approx 7.85\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{45\pi}{4} \approx 35.34\ cm^2$
أتحقق من فهمي صفحة 16	
	$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{\frac{10}{60}} = 12\pi$ إذن السرعة الزاوية هي 12π راديان لكل دقيقة أي نحو 37.7 راديان لكل دقيقة
أتدرب وأحل المسائل صفحة 16	
1	

2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	$-225° \times \frac{\pi\ rad}{180°} = -\frac{5\pi}{4} rad$
10	$-135° \times \frac{\pi\ rad}{180°} = -\frac{3\pi}{4} rad$
11	$75° \times \frac{\pi\ rad}{180°} = \frac{5\pi}{12} rad$
12	$500° \times \frac{\pi\ rad}{180°} = \frac{25\pi}{9} rad$

13	$-\frac{\pi}{7}\times\frac{180°}{\pi\ rad}=-\frac{180°}{7}$
14	$\frac{5\pi}{12}\times\frac{180°}{\pi\ rad}=75°$
15	$1.2\times\frac{180°}{\pi\ rad}=\frac{216°}{\pi}$
16	$4\times\frac{180°}{\pi\ rad}=\frac{720°}{\pi}$
17	$50°+360°(1)=410°$ $50°+360°(-1)=-310°$
18	$135°+360°(1)=495°$ $135°+360°(-1)=-225°$
19	$1290°+360°(3)=210°$ $1290°+360°(-4)=-150°$
20	$-150°+360°(1)=210°$ $-150°+360°(-1)=-510°$
21	$\frac{11\pi}{6}+2\pi(1)=\frac{23\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}+2\pi(-1)=-\frac{\pi}{6}$
22	$-\frac{\pi}{4}+2\pi(1)=\frac{7\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{4}+2\pi(-1)=-\frac{9\pi}{4}$
23	$-\frac{\pi}{12}+2\pi(1)=\frac{23\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{12}+2\pi(-1)=-\frac{25\pi}{12}$

24	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{19\pi}{6}$ $\frac{7\pi}{6} + 2\pi(-1) = -\frac{5\pi}{6}$
25	$l = \theta r = 1.8 \times 15 = 27\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1.8)^2(15) = 202.5\ cm^2$
26	$l = \theta r = 24 \times 2.7 = 64.8\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(24)^2(2.7) = 777.6\ cm^2$
27	$l = \theta r = 6.5 \times 4 = 26\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(6.5)^2(4) = 84.5\ cm^2$
28	$A = \frac{1}{2}(15)^2(1.6) - \frac{1}{2}(10)^2(1.6) = 100\ cm^2$
29	$P = (10)(1.6) + (15)(1.6) + 2(15 - 10) = 50\ cm$
30	$\frac{1}{2}r^2\theta = 500\ ,\quad r\theta = 20$ $\rightarrow \frac{1}{2}r(r\theta) = 500 \rightarrow \frac{1}{2}r(20) = 500 \rightarrow r = 50\ cm \quad \rightarrow \theta = 0.4\ rad$
31	$v(t) = \frac{r\theta}{t} = \frac{0.2(100 \times 2\pi)}{60} = 2.09\ m/s$
32	$\omega(t) = \frac{\theta}{t} = \frac{15(2\pi\ rad)}{10} = 3\pi\ rad/s$ $v(t) = \frac{r\theta}{t} = 3 \times 3\pi = 9\pi\ ft/s$

33	$r = \frac{7.5}{2} = 3.75\ in$ $\omega(t) = \frac{\theta}{t} = \frac{2400(2\pi\ rad)}{60} = 80\pi\ rad/s \approx 251.3\ rad/s$
34	$v(t) = \frac{r\theta}{t} = \frac{3.75 \times 2400(2\pi)}{60} = 300\pi\ in/s$
35	نفرض طول نصف القطر بالأمتار هو r $100r\theta = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \rightarrow \quad r = 200\ m$
36	عدد لانهائي من الحلول ضمن الفترة $[0,2\pi]$
37	$\theta = (\pi - 1)rad$
38	ABE ربع دائرة فيها AB=BE لأنهما أنصاف أقطار المثلث قائم الزاوية EBC فيه زاوية $\frac{\pi}{4}$ إذن $BEC = \frac{\pi}{4}$ فهو متطابق الضلعين، فيكون BC=r نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية EBC : $(EC)^2 = r^2 + r^2 \quad \rightarrow \quad EC = \sqrt{2}r$
39	$ACD = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
40	المحيط = $CD + BC + AB + EA + ED$ $10\sqrt{2} + 10 + 10 + \frac{\pi}{2}(10) + \frac{3\pi}{4}(10\sqrt{2}) \approx 48.4\ cm$ مساحة ECD + مساحة EBC + مساحة EBC = A $= \frac{1}{2}(10)^2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(10\sqrt{2})^2 \times \frac{3\pi}{4} \approx 464.9\ cm^2$

الدرس الثاني: الاقترانات المثلثية

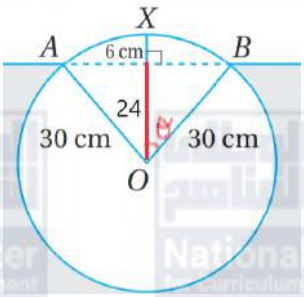
أتحقق من فهمي صفحة 20	
	$x = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}$ $\sin\theta = \frac{5}{7}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{24}}{7}$, $\tan\theta = \frac{5}{\sqrt{24}}$, $\csc\theta = \frac{7}{5}$, $\sec\theta = \frac{7}{\sqrt{24}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{24}}{5}$
أتحقق من فهمي صفحة 21	
	$r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $\sin\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta = -3$, $\csc\theta = \frac{-\sqrt{10}}{3}$, $\sec\theta = \sqrt{10}$, $\cot\theta = \frac{-1}{3}$
أتحقق من فهمي صفحة 23	
a	$\sin 3\pi = \frac{0}{1} = 0$
b	$\tan 90° = \frac{1}{0}$ غير معرف
c	$\sec\frac{-3\pi}{2} = \frac{1}{0}$ غير معرف
أتحقق من فهمي صفحة 26	
a	$\sin 210° = -\sin 30° = -0.5$
b	$\cos 510° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
c	$\sec 5\pi = \sec\pi = -1$
d	$\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$
أتحقق من فهمي صفحة 27	

	$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
أتحقق من فهمي صفحة 29	
a	$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$
B	$\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$
c	$\tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$
أتحقق من فهمي صفحة 31	
a	$AB = 16\theta \implies \theta = \frac{9.6}{16} = 0.6\ rad$
b	$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(16)^2(0.6) = 76.8$
c	$A = 76.8 - \frac{1}{2}(16)^2 \sin 0.6 \approx 4.5\ cm^2$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 31	
1	$x = \sqrt{81-9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{3}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\csc\theta = 3$, $\sec\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\cot\theta = 2\sqrt{2}$
2	$x = \sqrt{(18)^2 - (9)^2} = 4\sqrt{14}$ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{14}}{9}$, $\cos\theta = \frac{5}{9}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{14}}{5}$ $\csc\theta = \frac{9}{2\sqrt{14}}$, $\sec\theta = \frac{9}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{2\sqrt{14}}$
3	$x = \sqrt{(26)^2 - (14)^2} = 4\sqrt{30}$ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{30}}{13}$, $\cos\theta = \frac{7}{13}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{30}}{7}$ $\csc\theta = \frac{13}{2\sqrt{30}}$, $\sec\theta = \frac{13}{7}$, $\cot\theta = \frac{7}{2\sqrt{30}}$

4	$r=\sqrt{144+25}=13$ $\sin\theta=\frac{5}{13}\ ,\quad \cos\theta=-\frac{12}{13}\ ,\quad \tan\theta=-\frac{5}{12}$ $\csc\theta=\frac{13}{5}\ ,\quad \sec\theta=-\frac{13}{12}\ ,\quad \cot\theta=-\frac{12}{5}$
5	$r=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \tan\theta=-1$ $\csc\theta=-\sqrt{2}\ ,\quad \sec\theta=\sqrt{2}\ ,\quad \cot\theta=-1$
6	$r=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$ $\sin\theta=-\frac{5}{\sqrt{29}}\ ,\quad \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{29}}\ ,\quad \tan\theta=\frac{5}{2}$ $\csc\theta=-\frac{\sqrt{29}}{5}\ ,\quad \sec\theta=-\frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\quad \cot\theta=\frac{2}{5}$
7	$r=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$ $\sin\theta=\frac{7}{\sqrt{58}}\ ,\quad \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{58}}\ ,\quad \tan\theta=\frac{7}{3}$ $\csc\theta=\frac{\sqrt{58}}{7}\ ,\quad \sec\theta=\frac{\sqrt{58}}{3}\ ,\quad \cot\theta=\frac{3}{7}$
8	$\sec 135°=-\sec 45°=-\sqrt{2}$
9	$\tan-\frac{3\pi}{4}=-\tan\frac{3\pi}{4}=1$
10	$\cot\frac{8\pi}{3}=\cot\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
11	$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
12	$\sec\frac{15\pi}{4}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$
13	$\csc-630°=\csc 90°=1$
14	$\tan 7\pi=\tan\pi=0$
15	$\sin-\frac{2\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16	$r=\sqrt{144-49}=\sqrt{95}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{95}}{12}\ ,\quad \tan\theta=\frac{\sqrt{95}}{7}$ $\csc\theta=-\frac{12}{\sqrt{95}}\ ,\quad \sec\theta=-\frac{12}{7}\ ,\quad \cot\theta=\frac{7}{\sqrt{95}}$
17	$r=\sqrt{25-1}=\sqrt{24}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{24}}{5}\ ,\quad \tan\theta=-\sqrt{24}$ $\csc\theta=-\frac{5}{\sqrt{24}}\ ,\quad \cos\theta=\frac{1}{5}\ ,\quad \cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{24}}$
18	$r=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$ $\sin\theta=-\frac{4}{\sqrt{17}}\ ,\tan\theta=4\ ,\csc\theta=-\frac{\sqrt{17}}{4}\ ,\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ ,\sec\theta=-\sqrt{17}$
19	$r=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ $\sin\theta=\frac{1}{2}\ ,\quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\cot\theta=\sqrt{3}\ ,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$
20	$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$
21	$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$
22	$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$
23	نفرض θ زاوية القطاع $l=r\theta\ \rightarrow\ 2r=r\theta\ \rightarrow\ \theta=2$ $A=\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta\ \rightarrow\ 24=\frac{1}{2}r^2(2)-\frac{1}{2}r^2\sin 2$ $\rightarrow\ r=\sqrt{\frac{48}{2-\sin 2}}\approx 6.6\ cm$
24	نفرض طول الضلع الثالث في المثلث الأبيض يساوي h نجد عن طريق قانون جيب التمام أو بإنزال عمود من رأس المثلث المتطابق الضلعين على القاعدة. فنجد $h=2r\sin 1$ $P=2r+h=2r+2r\sin 1\approx 24.3\ cm$ محيط الشكل المظلل

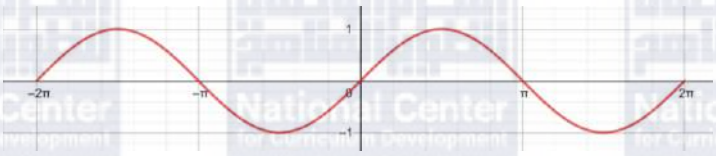
25	$\cos\frac{13\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -0.966$
26	$\cos\frac{11\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -0.966$
27	$\cos\frac{-\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = 0.966$
28	$\cos\frac{23\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = 0.966$
29	$\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$
30	$\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$
31	$A = \frac{1}{2}(3x)^2(0.75) - \frac{1}{2}(2x)^2(0.75)$ $30 = \frac{27}{8}x^2 - \frac{3}{2}x^2 \ \rightarrow x^2 = 16 \ \rightarrow x = 4$
32	$\tan 210° + \tan 240° = \tan 30° + \tan 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
33	$\frac{\sin 30° + \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

34	 $\cos\theta = \frac{24}{30} \rightarrow \theta \approx 37° \rightarrow 37° \times 2 = 74° = \frac{37\pi}{90}$ زاوية القطاع AOB مساحة القطعة العائمة = مساحة القطاع الدائري AOB – مساحة المثلث AOB $A = \frac{1}{2}(30)^2\left(\frac{37\pi}{90}\right) - \frac{1}{2}(30)(30)\sin\frac{37\pi}{90} \approx 149\ cm^2$ مساحة الجزء الواقع تحت سطح الماء = مساحة المقطع العرضي – مساحة القطعة العائمة $A = \pi(30)^2 - 149 \approx 2678\ cm^2$ $\frac{2678}{900\pi} \times 100 \approx 94.7\%$ النسبة المئوية للجزء الواقع تحت سطح الماء

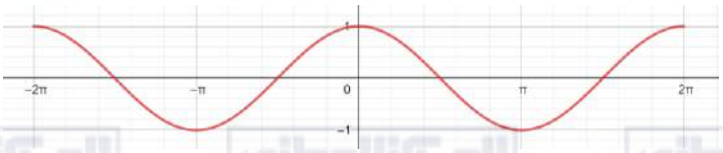
الدرس الثالث: تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيا

أتحقق من فهمي صفحة 34

1



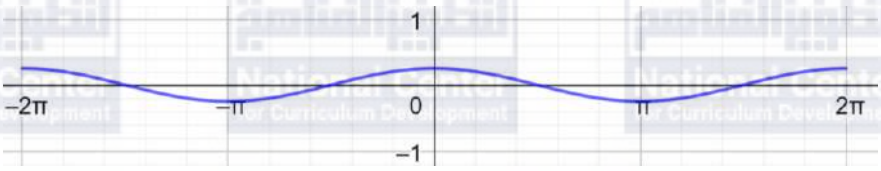
2



أتحقق من فهمي صفحة 38

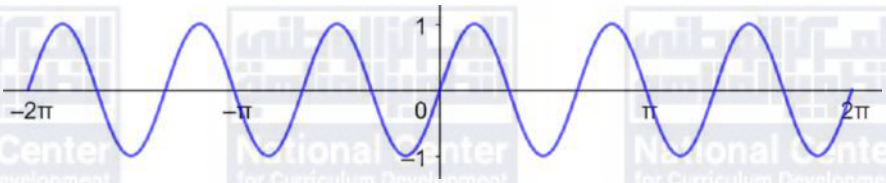
a

b



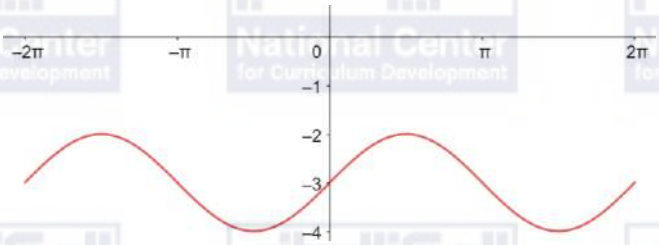
أتحقق من فهمي صفحة 40

a

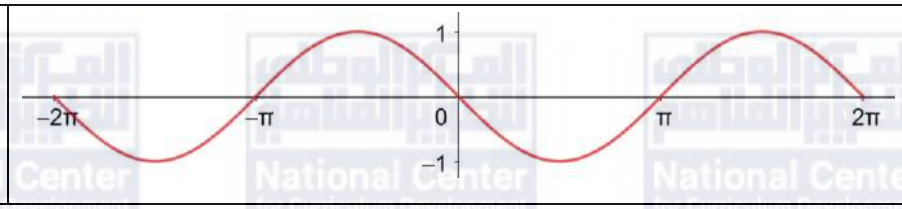


b

أتحقق من فهمي صفحة 41



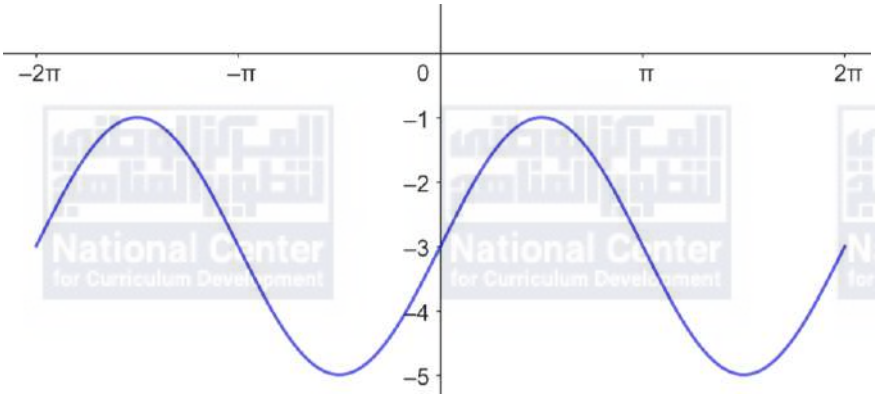
أتحقق من فهمي صفحة 41



أتحقق من فهمي صفحة 43

السعة = 2 ،

طول الدورة = 2π ، معادلة خط الوسط: $y=-3$

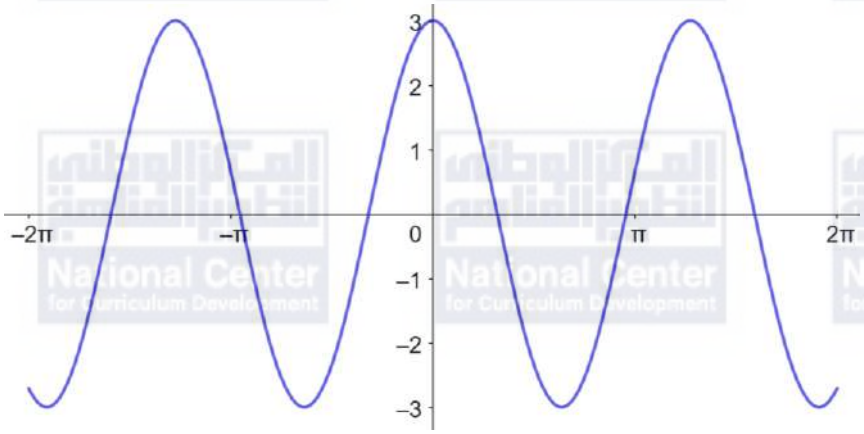


أتحقق من فهمي صفحة 45

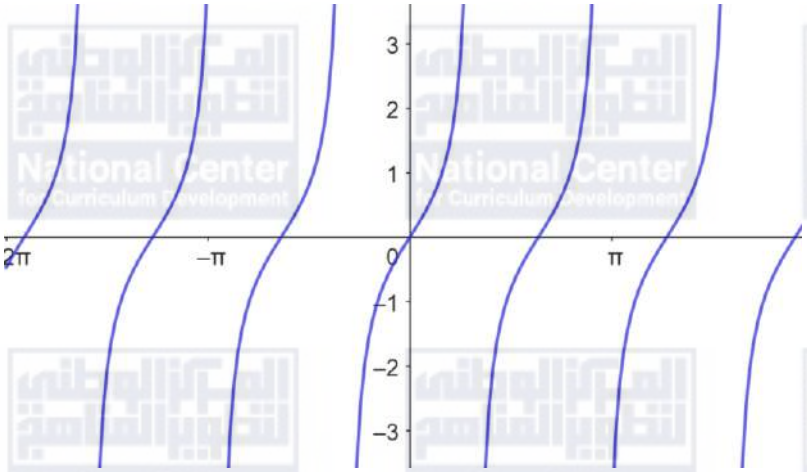
a

أقصى إزاحة = 3 ، طول الدورة = 4π ، التردد = $\frac{1}{4\pi}$

b



أتحقق من فهمي صفحة 46



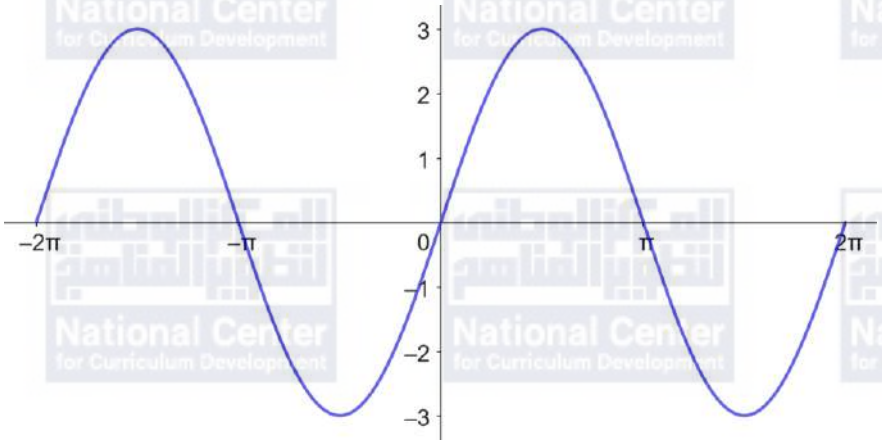
المجال: الأعداد الحقيقية جميعها ما عدا n حيث n عدد صحيح فردي

المدى: الأعداد الحقيقية جميعها

أتدرب وأحل المسائل صفحة 46

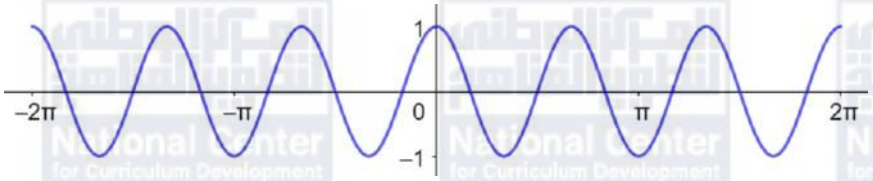
1

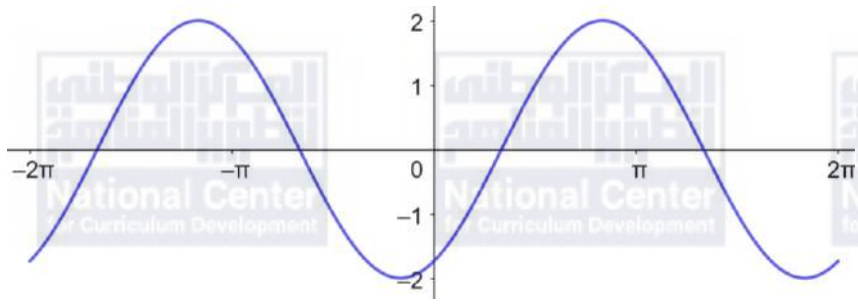
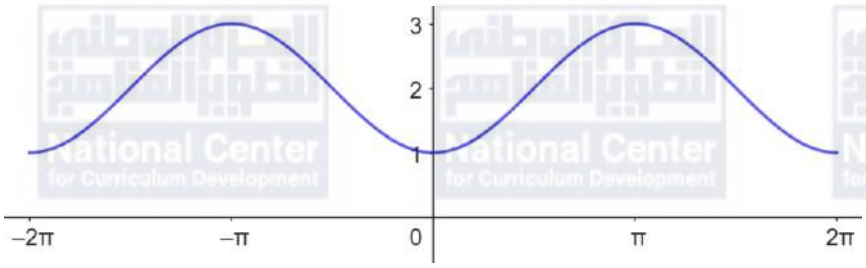
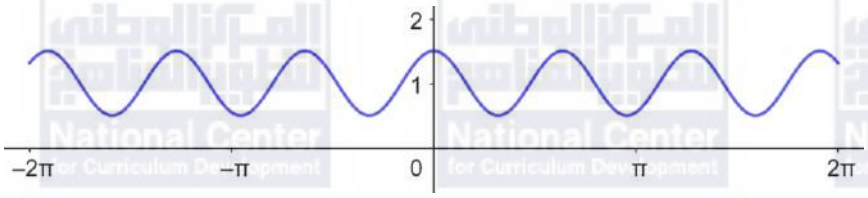
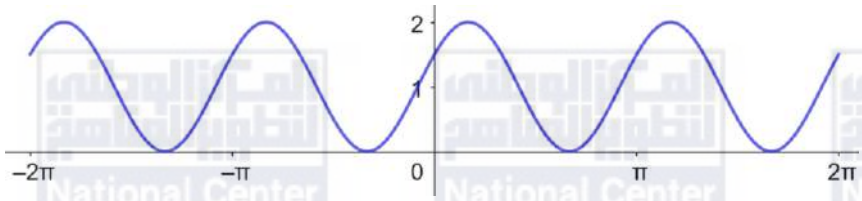
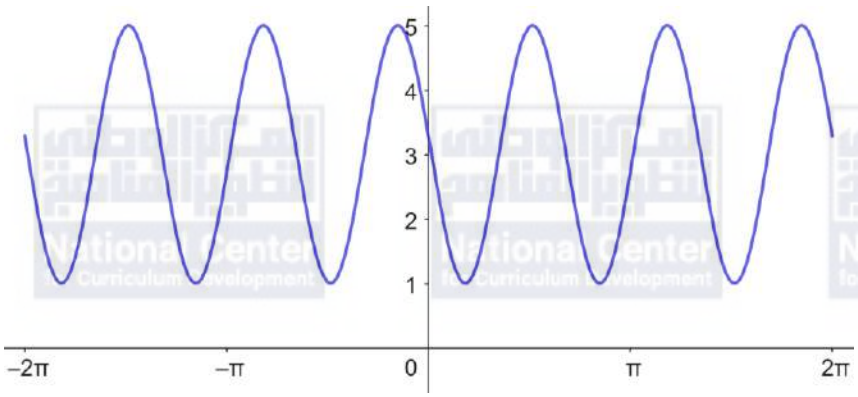
الدورة = 2π ، السعة = 3

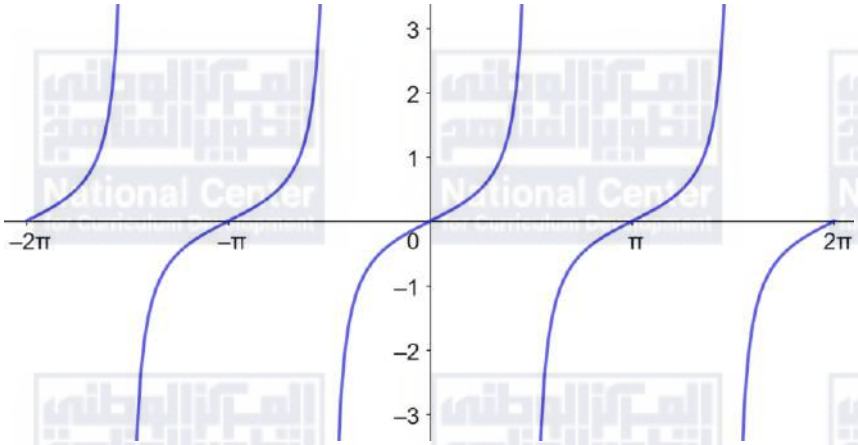
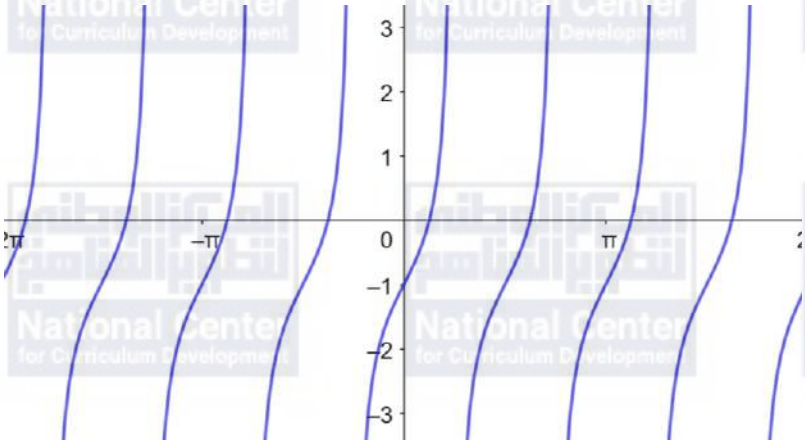


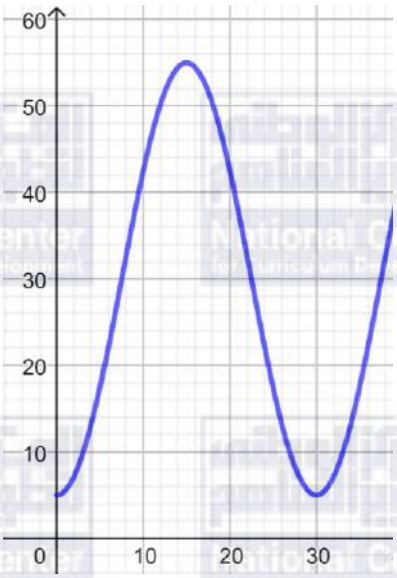
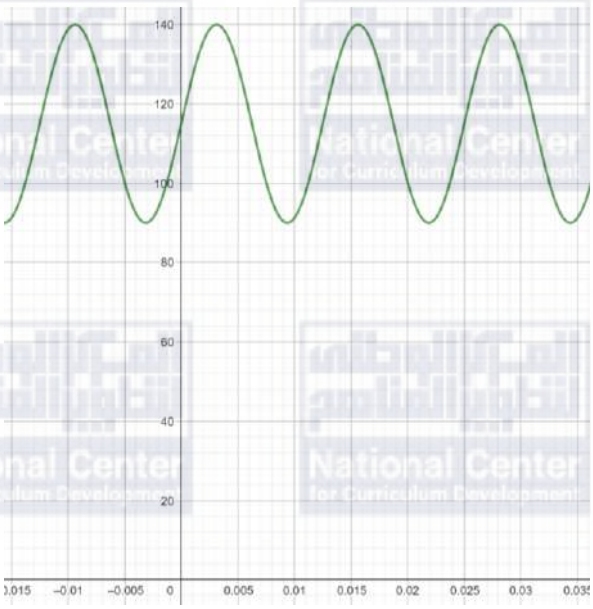
2

الدورة = $\frac{2\pi}{3}$ ، السعة = 1



3	الدورة = 2π ، السعة = 2 
4	الدورة = 2π ، السعة = 1 
5	الدورة = 2 ، السعة = 0.5 
6	الدورة = π ، السعة = 1 
7	الدورة = $\frac{2\pi}{3}$ ، السعة = 2 

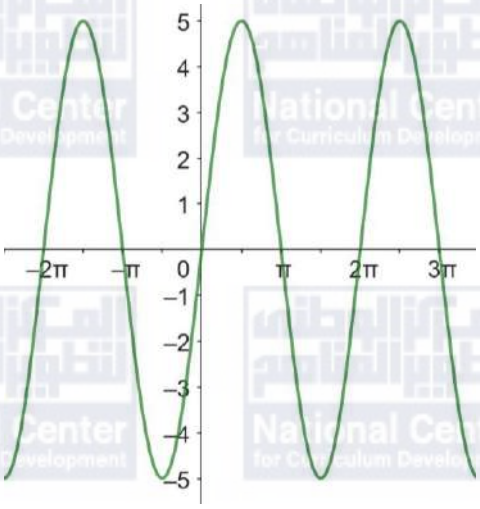
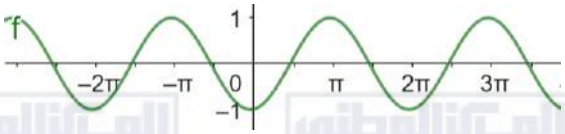
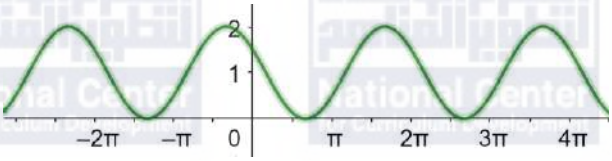
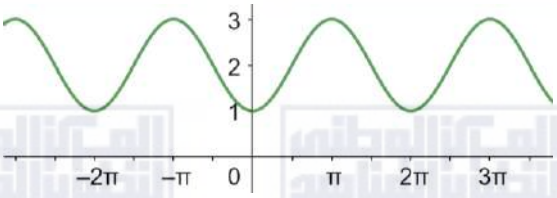
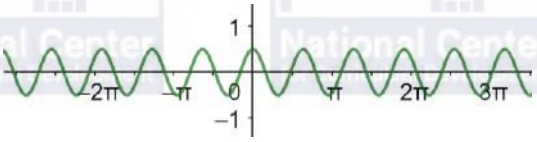
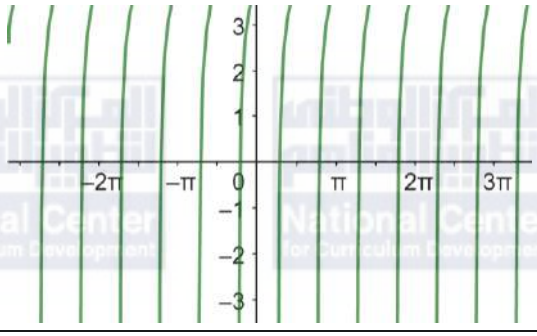
8	الدورة = π ، السعة غير معرفة 
9	الدورة = $\frac{\pi}{2}$ ، السعة غير معرفة 
10	f
11	b
12	e
13	a
14	c
15	d
16	إزاحة أفقية نحو اليمين مقدارها $\frac{\pi}{2}$ إزاحة رأسية للأعلى مقدارها 1
17	توسيع رأسي بمعامل مقداره 3 إزاحة رأسية للأسفل مقدارها 2

18	إزاحة أفقية نحو اليسار مقدارها 3π إزاحة رأسية للأسفل مقدارها 5
19	تضييق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{6}$ إزاحة أفقية نحو اليمين مقدارها π إزاحة رأسية للأعلى مقدارها 9
20	
21	أقصى ارتفاع 55 قدمًا، أدنى ارتفاع 5 أقدام.
22	السعة = 25، طول الدورة = $\frac{1}{80}$ ، التردد = 80
23	
24	يقل طول الدورة ويزيد التردد، لأنه مع ممارسة الرياضة فإن النبضات تصبح أسرع ويزداد ضغط الدم.

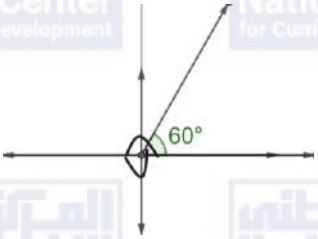
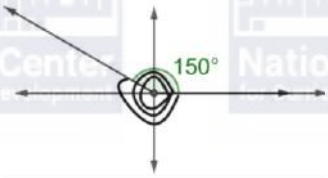
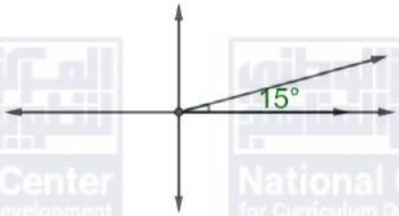
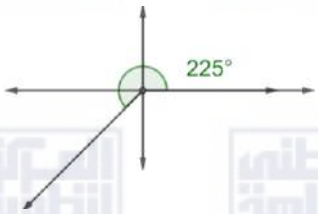
25	صحيحة، لأنه يمكن الحصول على منحنى اقتران الجيب بعمل إزاحة أفقية لمنحنى اقتران جيب التمام، والعكس صحيح.
26	غير صحيحة، لأن طول دورة الاقتران f يساوي $\frac{\pi}{4}$ بينما طول دورة الاقتران g يساوي π
27	$y = a\tan bx$ $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad b = 2 \quad \rightarrow y = a\tan 2x$ $5 = a\tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) \quad \rightarrow \quad a = 5$ $y = 5\tan 2x$
28	$\cos(-2x + 6\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-2x + 6\pi)\right)$ $= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - 6\pi\right)$ $= \sin\left(2x - \frac{11\pi}{2}\right)$

معمل برمجية جيوجبرا

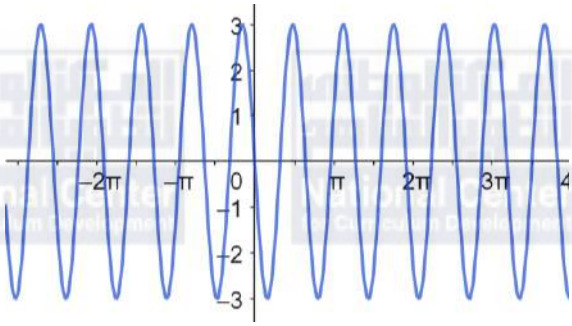
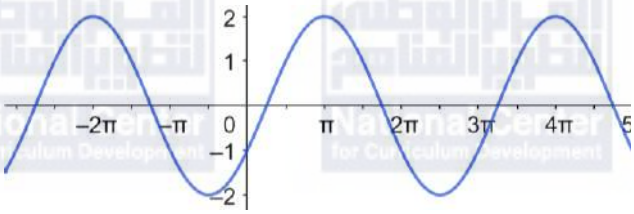
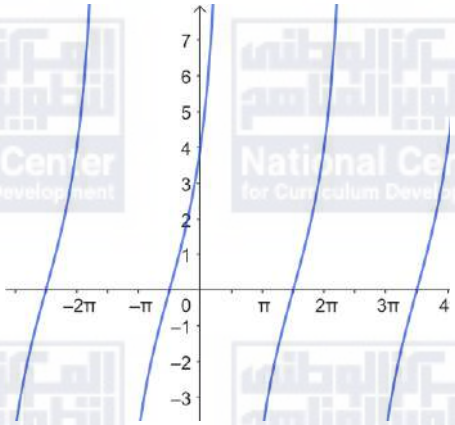
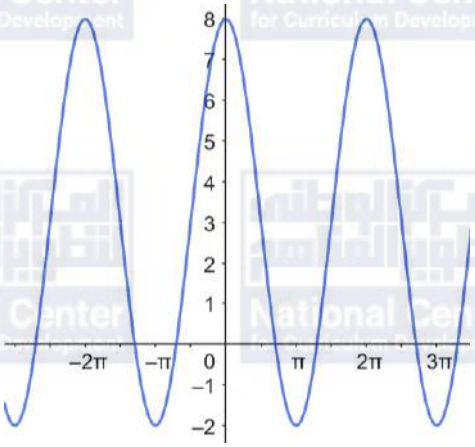
أتدرب صفحة 49

1	
2	
3	
4	
5	
6	

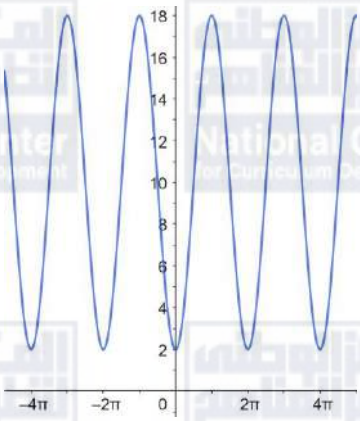
اختبار نهاية الوحدة الرابعة

1	b
2	$56° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{14\pi}{45}$ b
3	$l = r\theta = 15 \times \frac{8\pi}{7} \approx 53.9\ cm$ c
4	$y = 2\sin 2x$ c
5	a
6	a
7	
8	
9	
10	
11	$-720° \times \frac{\pi}{180°} = -4\pi$
12	$315° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{4}$

13	$\frac{13\pi}{8} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{585°}{2}$
14	$3.5\pi \times \frac{180°}{\pi} = 630°$
15	$-115° + 360°(1) = 245°$ $-115° + 360°(-1) = -475°$
16	$780° + 360°(1) = 1140°$ $780° + 360°(-3) = -300°$
17	$-\frac{7\pi}{3} + 2\pi(1) = -\frac{\pi}{3}$ $-\frac{7\pi}{3} + 2\pi(2) = \frac{5\pi}{3}$
18	$\frac{\pi}{9} + 2\pi(1) = \frac{19\pi}{9}$ $\frac{\pi}{9} + 2\pi(-1) = -\frac{17\pi}{9}$
19	$A = \frac{1}{2}r^2\theta \rightarrow 12 = \frac{1}{2}r^2(0.7) \rightarrow r = \sqrt{\frac{240}{7}} \approx 5.86$
20	$A = \frac{1}{2}r^2\theta \rightarrow 12 = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow r = \sqrt{\frac{144}{5\pi}} \approx 3.03$
21	$\sec 300° = \sec 60° = 2$
22	$\tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$
23	$\cos\frac{14\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
24	$\sec -3\pi = \sec \pi = -1$
25	$\sin\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\csc\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{3}{4}$
26	$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

27	الدورة = 2 ، السعة = 3 
28	الدورة = 3π ، السعة = 2 
29	الدورة = 4π ، السعة غير معرفة 
30	الدورة = 2π ، السعة = 5 

31	b	32	c	33	a	34	d

35	$h = -8\cos\frac{\pi}{4} + 10 = -8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 10 \approx 4.34$
36	
37	$L = 11.5 + 6.5\sin\frac{\pi}{5}(5) = 11.5$ $H = 27.5 + 17.5\cos\frac{\pi}{5}(5) = 10$ $\frac{H}{L} = \frac{10}{11.5} \approx 87\%$
38	نلاحظ أن الوشق يعتمد في تغذيته على الأرانب، مما يؤدي إلى أن تقل أعداد الأرانب مع الزمن، وبالمقابل تزداد أعداد الوشق. ومع استمرار انخفاض أعداد الأرانب تبدأ أعداد الوشق بالانخفاض لعدم توفر غذاء كاف. ومع استمرار أعداد الوشق بالانخفاض تبدأ أعداد الأرانب بالتزايد من جديد.

الوحدة الخامسة: التكامل

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

أتحقق من فهمي صفحة 55	
a	$F(x) = x^{10} + C$
b	$F(x) = x^{-11} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 57	
a	$\int 9\,dx = 9x + C$
b	$\int x^{-4}dx - \frac{1}{3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$
c	$\int \sqrt[6]{x}\,dx = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 58	
a	$\int (2x^4 + 3x^3 - 7x^2)dx = \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + C$
b	$\int \left(5x^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\right)dx = -10x^{-\frac{1}{2}} + x^3 + C = -\frac{10}{\sqrt{x}} + x^3 + C$
أتحقق من فهمي صفحة 59	
a	$\int (2x+3)(x-1)dx = \int (2x^2 + 2x - 3)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$
b	$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C$
c	$\int \frac{2x^2+4}{x^2}dx = \int (2 + 4x^{-2})dx = 2x - 4x^{-1} + C = 2x - \frac{4}{x} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 60	
a	$\int (3x-4)^6 dx = \frac{1}{21}(3x-4)^7 + C$
b	$\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 60	
1	$F(x) = x^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{x^3} + C$
2	$F(x) = x^{-1} + C = \frac{1}{x} + C$
3	$F(x) = -5x + C$
4	$F(x) = x^6 + C$
5	$\int 6x dx = 3x^2 + C$
6	$\int (4x + 2) dx = 2x^2 + 2x + C$
7	$\int 2x^4 dx = \frac{2}{5}x^5 + C$
8	$\int \frac{5}{x^3} dx = \int 5x^{-3}\, dx = -\frac{5}{2}x^{-2} + C = -\frac{5}{2x^2} + C$
9	$\int 2x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$
10	$\int \frac{10}{\sqrt{x}} dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}} dx = 20\sqrt{x} + C$
11	$\int x^2(x - 8) dx = \int (x^3 - 8x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + C$
12	$\int \left(x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx = \int \left(x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$
13	$\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} dx = \int (4 - 2x^{-3}) dx = 4x + x^{-2} + C = 4x + \frac{1}{x^2} + C$
14	$\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} dx = \int (x + 1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

15	$\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^4} dx = \int (1+2x^{-2}+x^{-4})dx$ $= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C$ $= x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$
16	$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
17	$\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$
18	$\int (x-1)(x-3)(x+1)dx = \int (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$ $= \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$
19	$\int (x+7)^4 dx = \frac{1}{5}(x+7)^5 + C$
20	$\int \frac{3}{(10x+1)^2} dx = \int 3(10x+1)^{-2} dx = -\frac{3}{10}(10x+1)^{-1} + C$ $= -\frac{3}{10(10x+1)} + C$
21	$\int \frac{2}{\sqrt{10x+5}} dx = \int 2(10x+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{5}(10x+5)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{5}\sqrt{10x+5} + C$
22	$\int y^2\, dx = \int \left(\sqrt[3]{2x+5}\right)^2 dx = \int (2x+5)^{\frac{2}{3}} dx$ $= \frac{3}{10}(2x+5)^{\frac{5}{3}} + C$

23	$\int y\,dx = \int \sqrt[3]{2x+5}\,dx = \int (2x+5)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{8}(2x+5)^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{2x+5}\right)^4 + C$ $= \frac{3}{8}y^4 + C$
24	$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int (x - x^{-2})dx = \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \quad (b)$
25	الخطأ هو أن تكامل ضرب اقترانين لا يساوي ضرب تكامليهما. الحل الصحيح هو: $\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x^2 - x - 1)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$
26	$\int \frac{(2x-3)^3(2x^2-5x+3)}{x-1}\,dx = \int \frac{(2x-3)^3(2x-3)(x-1)}{x-1}\,dx$ $= \int (2x-3)^4\,dx$ $= \frac{1}{10}(2x-3)^5 + C$

27

$$\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \frac{2}{x}+10x+C$$

$$\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \int \left(\frac{P}{2}x^{-2}+Q\right)dx$$

$$= -\frac{P}{2}x^{-1}+Qx+C$$

$$= -\frac{P}{2x}+Qx+C$$

وبمقارنة هذه النتيجة مع النتيجة المعطاة نلاحظ أنّ:

$$\Longrightarrow -\frac{P}{2}=2 \quad \text{و} \quad Q=10$$

$$\Longrightarrow P=-4 \quad \text{و} \quad Q=10$$

حلّ آخر:

نعلم أن مشتقة نتيجة التكامل تساوي الاقتران المكامَل (الذي وُجد تكامله)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}+10x+C\right)=\frac{P}{2x^2}+Q$$

$$\frac{-2}{x^2}+10=\frac{P}{2x^2}+Q$$

وبمقارنة طرفي هذه المعادلة نلاحظ أنّ:

الحد الثابت : $Q=10$

معامل $\frac{1}{x^2}$: $\frac{P}{2}=-2 \Rightarrow P=-4$

الدرس الثاني: الشرط الأولي

مسألة اليوم صفحة 62

$$S(t) = \int 500\sqrt[4]{t}\,dt$$
$$= \int 500t^{\frac{1}{4}}dt$$
$$= 500 \times \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C \quad = 400t^{\frac{5}{4}} + C$$

بما أن $S(0) = 0$ ، إذن $C = 0$

ومنه $S(t) = 400\sqrt[4]{t^5}$

أتحقق من فهمي صفحة 63

$$f(x) = \int (6x^2 + 5)dx$$
$$f(x) = 2x^3 + 5x + C$$
$$f(1) = 2(1)^3 + 5(1) + C$$
$$9 = 7 + C \implies \quad C = 2$$
$$f(x) = 2x^3 + 5x + 2$$

أتحقق من فهمي صفحة 64

$$C(x) = \int (0.3x^2 + 2x)dx$$
$$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + K$$
$$C(10) = 0.1(10)^3 + (10)^2 + K$$
$$2200 = 100 + 100 + K$$
$$K = 2000$$
$$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$$

أتحقق من فهمي صفحة 65

$$s(t) = \int v(t)dt \quad = \int (36t - 3t^2)dt \quad = 18t^2 - t^3 + C$$
$$s(0) = 18(0)^2 - (0)^3 + C$$
$$0 = 0 + C$$
$$C = 0$$
$$s(t) = 18t^2 - t^3$$
$$s(3) = 18(3)^2 - (3)^3$$
$$= 135$$

إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: 135 m

أتحقق من فهمي صفحة 67

$$v(t) = \int a(t)dt$$
$$= \int (4t - 4)dt$$
$$= 2t^2 - 4t + C_1$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$ ، فإن

$v(0) = 5$ وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$v(0) = 2(0)^2 - 4(0) + C_1$$
$$5 = 0 + C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 5$$
$$v(t) = 2t^2 - 4t + 5$$

$$s(t) = \int v(t)dt$$
$$= \int (2t^2 - 4t + 5)dt$$
$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$
$$s(0) = \frac{2}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 5(0) + C_2$$
$$0 = 0 + C_2$$
$$C_2 = 0$$
$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$$
$$s(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3)$$
$$= 15$$

موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة هو: 15 m

أتدرب وأحل المسائل صفحة 67	
1	$f(x) = \int (x-3)dx$ $= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ $9 = \frac{1}{2} \times (2)^2 - 3(2) + C$ $C = 13$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$
2	$f(x) = \int (x^2 - 4)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$ $7 = \frac{1}{3} \times (0)^3 - 4(0) + C$ $C = 7$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$
3	$f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$ $= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$ $9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C$ $C = 7$ $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

4	$f(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2\right)dx$ $=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^2\right)dx$ $=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3+C$ $11=\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}(4)^3+C$ $C=11$ $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3+11$ $=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{12}x^3+11$
5	$f(x)=\int(x+2)^2dx$ $=\int(x^2+4x+4)dx$ $=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+C$ $7=\frac{1}{3}(1)^3+2(1)^2+4(1)+C$ $C=\frac{2}{3}$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+\frac{2}{3}$

6	$f(x)=\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-x\right)dx$ $=\int\left(3x^{-\frac{1}{2}}-x\right)dx$ $=6x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2+C$ $=6\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2$ $0=6\sqrt{4}-\frac{1}{2}(4)^2+C$ $C=-4$ $f(x)=6\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-4$
7	$y=\int(0.4x+3)dx$ $=0.2x^2+3x+C$ $5=0.2(0)^2+3(0)+C$ $C=5$ $y=0.2x^2+3x+5$

8	$f(x)=\int \frac{x^2+10}{x^2}dx$ $=\int \left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{10}{x^2}\right)dx$ $=\int (1+10x^{-2})dx$ $=x-10x^{-1}+C$ $=x-\frac{10}{x}+C$ $2=5-\frac{10}{5}+C$ $C=-1$ $f(x)=x-\frac{10}{x}-1$
9	$f(x)=\int (3x^2-4x-5)dx$ $=x^3-2x^2-5x+C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,0)$ إذن: $0=(1)^3-2(1)^2-5(1)+C$ $C=6$ $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$
10	$y=\int 4t^{-\frac{2}{3}}dt$ $=12t^{\frac{1}{3}}+C$ $=12\sqrt[3]{t}+C$ $30=12\sqrt[3]{8}+C$ $C=6$ $y=12\sqrt[3]{t}+6$

11	$y = 12\sqrt[3]{27} + 6$ $= 42$ إذن، نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: 42 cm
12	$h(t) = \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}\right) dt$ $= \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$ $= 0.12t^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$ $= 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$ بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها 2 ft، فإن $h(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $2 = 0.12\sqrt[3]{(0)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} + C$ $C = 2$ $h(t) = 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 2$
13	$s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (2t + 3)dt$ $= t^2 + 3t + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $s(t) = t^2 + 3t + C$ $0 = (0)^2 + 3(0) + C$ $C = 0$ $s(t) = t^2 + 3t$ $s(3) = (3)^2 + 3(3)$ $= 18$ موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة هو: 18 m

14

$$v(t) = \int a(t)dt$$
$$= \int t^2 dt$$
$$= \frac{1}{2}t^3 + C_1$$

بما أن السرعة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي 1 m/s ، فإن $v(1) = 1$ وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$1 = \frac{1}{2}(1)^3 + C_1$$
$$C_1 = \frac{1}{2}$$
$$v(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}$$
$$s(t) = \int v(t)dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\right)dt$$
$$= \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو 3 m، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$$
$$3 = \frac{1}{8}(0)^4 + \frac{1}{2}(0) + C_2$$
$$C_2 = 3$$
$$s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + 3$$
$$s(2) = \frac{1}{8}(2)^4 + \frac{1}{2}(2) + 3$$
$$= 6$$

موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: 6 m

	$v(t) = \int a(t)dt$
	$= \int (9 - 2t)dt$
	$= 9t - t^2 + C_1$
	بما أن السرعة الابتدائية هي $2\ \text{m/s}$ ، فإن $v(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1
	$v(t) = 9t - t^2 + C_1$
	$2 = 9(0) - (0)^2 + C_1$
	$C_1 = 2$
	$v(t) = 9t - t^2 + 2$
	$s(t) = \int v(t)dt$
`	$= \int (9t - t^2 + 2)dt$
15	$= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$
	بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2
	$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$
	$0 = \frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) + C_2$
	$C_2 = 0$
	$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t$
	$s(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)$
	$= \frac{10}{3}$
	موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $\frac{10}{3}\ \text{m}$

16	$f'(x) = ax + b$ $f(x) = \int (ax + b)dx$ $= \frac{a}{2}x^2 + bx + C$ ميل المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(-2,8)$ هو 7 معناها: $f'(-2) = 7$ وكذلك $f(-2) = 8$ منحنى الاقتران يقطع محور y عند النقطة $(0,18)$ معناه: $f(0) = 18$ $f'(-2) = 7 \quad \Rightarrow a(-2) + b = 7$ $\Rightarrow -2a + b = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $f(-2) = 8 \Rightarrow \frac{a}{2}(-2)^2 + b(-2) + C = 8$ $\Rightarrow 2a - 2b + C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $f(0) = 18 \Rightarrow \frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18$ $\Rightarrow C = 18$ نعوض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على: $2a - 2b + 18 = 8 \Rightarrow 2a - 2b = -10$ $\Rightarrow a - b = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ نجمع طرفي المعادلتين (1) و(4) فنحصل على: $-a = 2 \Rightarrow a = -2$ نعوض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b = 3$ قاعدة الاقتران هي: $f(x) = -x^2 + 3x + 18$

17

$$f'(x) = 4 - \frac{100}{x^2}$$

$$f(x) = \int \left(4 - \frac{100}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (4 - 100x^{-2}) dx$$

$$= 4x + 100x^{-1} + C$$

$$= 4x + \frac{100}{x} + C$$

للاقتران f نقطة حرجة عن $(a, 10)$ إذن: $f'(a) = 0$ وكذلك $f(a) = 10$

$$f'(a) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{100}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{100}{a^2}$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^2 = 25$$

$$\Rightarrow a = \pm 5$$

لكن $a > 0$ إذن $a = 5$، ومنه $f(5) = 10$

$$10 = 4(5) + \frac{100}{5} + C$$

$$\Rightarrow C = -30$$

وتكون قاعدة الاقتران: $f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$

الدرس الثالث: التكامل المحدود

مسألة اليوم صفحة 69

$$C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$$

مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 دراجة إلى 600 دراجة شهريًّا هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$$

$$f(600) - f(300) = \int_{300}^{600} \left(500 - \frac{x}{3}\right) dx$$

$$= \left(500x - \frac{x^2}{6}\right)\Big|_{300}^{600}$$

$$= \left(500(600) - \frac{(600)^2}{6}\right) - \left(500(300) - \frac{(300)^2}{6}\right)$$

$$= 105000$$

إذن، عند زيادة الإنتاج من 300 إلى 400 دراجة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًّا بمقدار 105000 دينار.

أتحقق من فهمي صفحة 70

a

$$\int_1^4 (8x - \sqrt{x})dx = \int_1^4 \left(8x - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)$$

$$= \frac{166}{3}$$

b

$$\int_{-1}^{2}(1-x)(1+3x)dx = \int_{-1}^{2}(1+3x-x-3x^2)dx$$
$$= \int_{-1}^{2}(1+2x-3x^2)dx$$
$$= (x+x^2-x^3)|_{-1}^{2}$$
$$= (2+2^2-2^3)-(-1+(-1)^2-(-1)^3)$$
$$= -3$$

أتحقق من فهمي صفحة 71

$$\int_0^k 6x^2dx = 2$$
$$2x^3|_0^k = 2$$
$$2k^3 - 2(0)^3 = 2$$
$$2k^3 = 2$$
$$k^3 = 1$$
$$k = 1$$

أتحقق من فهمي صفحة 73

a

$$\int_{-1}^{1}\big(f(x)+3h(x)\big)dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx + \int_{-1}^{1}3h(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}f(x)dx + 3\int_{-1}^{1}h(x)dx$$
$$= 5+3(7)$$
$$= 26$$

b

$$\int_{-1}^{4}f(x)dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx + \int_{1}^{4}f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}f(x)dx - \int_{4}^{1}f(x)dx$$
$$= 5-2$$
$$= 3$$

c

$$\int_1^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx$$
$$= -4\int_{-1}^{1} h(x)dx$$
$$= -4(7)$$
$$= -28$$

أتحقق من فهمي صفحة 74

a

بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1} (1+x)dx + \int_{1}^{2} 2xdx$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{1} + x^2|_1^2$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(-2 + \frac{1}{2}(-2)^2\right) + (2^2 - 1^2)$$
$$= \frac{9}{2}$$

b

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} 3-x, & x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3} (3-x)dx + \int_{3}^{4} (x-3)dx$$
$$= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big|_{3}^{4}$$
$$= \left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(4)^2 - 3(4)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)\right)$$
$$= \frac{17}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 76

$P'(x) = 165 - 0.1x$

مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية من 1400 دراجة إلى 1500 جهاز هو:

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)dx$$

$$P(1500) - P(1400) = \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)dx$$

$$= (165x - 0.05x^2)|_{1400}^{1500}$$

$$= (165(1500) - 0.05(1500)^2) - (165(1400) - 0.05(1400)^2)$$

$$= 2000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1400 جهاز إلى 1500 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهريًّا بمقدار 2000 دينار.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 76

1

$$\int_{-1}^{3} 3x^2 dx = x^3|_{-1}^{3}$$
$$= (3)^3 - (-1)^3$$
$$= 28$$

2

$$\int_{-3}^{-2} 6dx = 6x|_{-3}^{-2}$$
$$= 6(-2) - 6(-3)$$
$$= 6$$

3

$$\int_0^2 (3x^2 + 4x + 3)dx = (x^3 + 2x^2 + 3x)|_0^2$$
$$= \big((2)^3 + 2(2)^2 + 3(2)\big) - \big((0)^3 + 2(0)^2 + 3(0)\big)$$
$$= 22$$

4	$\int_1^8 8\sqrt[3]{x}dx = \int_1^8 8x^{\frac{1}{3}}dx$ $= 6x^{\frac{4}{3}}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{x^4}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{1^4}$ $= 90$
5	$\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
6	$\int_{-2}^3 (-x^2 + 4x - 5)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right)\Big\|_{-2}^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 5(3)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2)\right)$ $= -\frac{80}{3}$
7	$\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2 - 4)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\|_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right)$ $= \frac{2}{3}$

8	$\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-3}^{3}$ $=\left(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3\right)-\left(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $=36$
9	$\int_1^4\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int_1^4\left(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ $=\int_1^4\left(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$ $=\left(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_1^4$ $=\left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big\vert_1^4$ $=\left(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}\right)$ $=\frac{5}{2}$
10	$\int_1^4 x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^4 x^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$ $=\int_1^4\left(x^{\frac{7}{2}}+x^2\right)dx$ $=\left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_1^4$ $=\left(\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_1^4$ $=\left(\frac{2}{9}\sqrt{4^9}+\frac{1}{3}(4)^3\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{1^9}+\frac{1}{3}(1)^3\right)$ $=\frac{1211}{9}$

11	$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2}\right) - \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2}\right)$ $= \frac{27}{4} = 6.75$
12	$\int_1^9 (2+\sqrt{x})^2 dx = \int_1^9 (4 + 4\sqrt{x} + x) dx$ $= \int_1^9 \left(4 + 4x^{\frac{1}{2}} + x\right) dx$ $= \left(4x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^9$ $= \left(4(9) + \frac{8}{3}(9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(9)^2\right) - \left(4(1) + \frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= \frac{424}{3}$

13

$$\int_{-1}^{4} |6-3x|dx$$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|6-3x| = \begin{cases} 6-3x, & x < 2 \\ 3x-6, & x \geq 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{4} |6-3x|dx = \int_{-1}^{2} (6-3x)dx + \int_{2}^{4} (3x-6)dx$$

$$= \left(6x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$= \left(6(2) - \frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(6(-1) - \frac{3}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{3}{2}(4)^2 - 6(4)\right) - \left(\frac{3}{2}(2)^2 - 6(2)\right)$$

$$= \frac{39}{2}$$

14

$$\int_{3}^{5} |x-2|dx$$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

ألاحظ أن نقطة التشعيب خارج فترة التكامل،

فلا أجزىء التكامل ويكون على هذه الفترة: $|x-2| = x-2$

$$\int_{3}^{5} |x-2|dx = \int_{3}^{5} (x-2)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{3}^{5}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(5)^2 - 2(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 2(3)\right)$$

$$= 4$$

15	$\int_2^3 \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int_2^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$ $= \int_2^3 (x-1)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big\|_2^3$ $= \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2\right) = \frac{3}{2}$
16	بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 (2x+1)dx + \int_3^4 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\|_0^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^4$ $= ((3)^2+3) - ((0)^2+0) + \left(10(4) - \frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(10(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)$ $= \frac{37}{2}$
17	$\int_2^2 g(x)dx = 0$
18	$\int_5^1 (g(x)-2)dx = \int_5^1 g(x)dx - \int_5^1 2dx$ $= (-8) - ((2x)\|_5^1)$ $= (-8) - \big((2(1)) - (2(5))\big)$ $= 0$
19	$\int_1^2 (3f(x)+x)dx = \int_1^2 3f(x)dx + \int_1^2 xdx$ $= 3\int_1^2 f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^2$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= -\frac{21}{2}$

20	$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$ $= -(-4) + 6$ $= 10$
21	$\int_1^5 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx$ $= 6 - 8$ $= -2$
22	$\int_1^5 \big(4f(x) + g(x)\big)dx = \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4(6) + 8$ $= 32$
23	$\int_1^m (6x - 10)dx = 4$ $(3x^2 - 10x)\|_1^m = 4$ $(3m^2 - 10m) - \big(3(1)^2 - 10(1)\big) = 4$ $3m^2 - 10m + 7 = 4$ $3m^2 - 10m + 3 = 0$ $(3m - 1)(m - 3) = 0$ $3m - 1 = 0 \implies m = \frac{1}{3}$, $m - 3 = 0 \implies m = 3$
24	$C'(x) = 6x + 1$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا هو: $C(b) - C(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $C(20) - C(10) = \int_{10}^{20} (6x + 1)dx$ $= (3x^2 + x)\|_{10}^{20}$ $= (3(20)^2 + 20) - (3(10)^2 + 10)$ $= 910$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 10 قطع إلى 20 قطعة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًّا بمقدار 910 دنانير.

25

$$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$$

$$N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4$$

$$= 112\sqrt{t^5}\Big|_0^4$$

$$= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5}$$

$$= 3584$$

إذن، يدخل البحيرة 3584 كيلوغرامًا من الملوثات في 4 أشهر.

26

خالد لم يراعِ ترتيب حدود التكامل عند التعويض، يجب أن يطرح قيمة الاقتران الأصلي عند الحد السفلي للتكامل من قيمته عند الحد العلوي على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2 + x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right)$$

$$= \frac{14}{3}$$

27

$$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$$

$$= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

28	$\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$ $(ax^2+7x)\|_1^5 = 4a^2$ $\big(a(5)^2+7(5)\big)-\big(a(1)^2+7(1)\big)=4a^2$ $25a+35-a-7=4a^2$ $24a+28=4a^2$ $4a^2-24a-28=0$ $a^2-6a-7=0$ $(a-7)(a+1)=0$ $a-7=0 \implies a=7 \quad , a+1=0 \implies a=-1$

الدرس الرابع: المساحات والحجوم

مسألة اليوم صفحة 78

$f(x) = 4 - x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies 4 - x^2 = 0$$
$$\implies (2 + x)(2 - x) = 0$$
$$\implies x = -2 \ , \ \ x = 2$$

وهي تمثل حدود التكامل

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$
$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

إذن، المساحة هي: 10.667 كيلومتر مربع.

أتحقق من فهمي صفحة 80

$f(x) = x + 3$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x + 3 = 0$$
$$\implies x = -3$$

بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1,3]$، إذن نهملها.
نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x

$$A = \int_{-1}^{3} (x + 3)dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 9\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - 3\right)$$
$$= 16$$

إذن، المساحة هي: 16 وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 81

$f(x) = x^2 - 4$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^2 - 4 = 0$$
$$\implies (x-2)(x+2) = 0$$
$$\implies x = 2 \ , \quad x = -2$$

بما كلا العددين $2,2-$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1,1]$، إذن نهملهما.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,1]$.

$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)dx$$
$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right)$$
$$= \frac{22}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{22}{3}$ وحدات مربعة

أتحقق من فهمي صفحة 83

$f(x) = x^2 + 2x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^2 + 2x = 0$$
$$\implies x(x+2) = 0$$
$$\implies x = 0 \ , x = -2$$

بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3, -1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين:

$[-2, -1]$ و $[-3, -2]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, -2]$، وليكن $-\frac{5}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, -2]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن $-\frac{3}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-2, -1]$

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)dx - \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-3}^{-2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-2}^{-1}$$
$$= \left(\left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right)\right)$$
$$= 2$$

إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 85

$f(x) = x^2 + 5x + 4$

a

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$\implies (x+4)(x+1) = 0$$
$$\implies x = -4 \ , x = -1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-4, -1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-4, -1]$

$$A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_{-4}^{-1}$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{5}{2}(-4)^2 + 4(-4)\right)\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة.

$f(x) = x^3 - 9x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^3 - 9x = 0$$
$$\implies x(x^2 - 9) = 0$$
$$\implies x(x+3)(x-3) = 0$$
$$\implies x = 0\ , x = -3\ , x = 3$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3,0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-1) = (-1)^3 - 9(-1) = 8 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3,0]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[0,3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1) = (1)^3 - 9(1) = -8 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0,3]$

b

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{3}$$

$$= \left((0) - \left(\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{9}{2}(-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{9}{2}(3)^2\right) - (0)\right)$$

$$= \frac{81}{2}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{81}{2}$ وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 86

$$V = \int_{-1}^{1} \pi y^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \pi (x^2 - 1)^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \pi (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$
$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \pi \left(\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) \right) = \frac{16}{15}\pi$$

إذن حجم المجسم الناتج من الدوران هو $\frac{16}{15}\pi$ وحدة مكعبة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 87

1

$$A = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x \right)\Big|_{-2}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1) \right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2) \right)$$
$$= 9$$

2

$$A = -\int_{2}^{4} \left(\frac{2}{x^2} - 3 \right) dx = -\int_{2}^{4} (2x^{-2} - 3) dx$$
$$= \int_{2}^{4} (-2x^{-2} + 3) dx$$
$$= (2x^{-1} + 3x)|_{2}^{4}$$
$$= \left(\frac{2}{x} + 3x \right)\Big|_{2}^{4}$$
$$= \left(\frac{2}{4} + 3(4) \right) - \left(\frac{2}{2} + 3(2) \right)$$
$$= \frac{11}{2}$$

3	$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)dx - \int_{0}^{1} (x^3 - 3x)dx$ $= \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + 3x)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{1}$ $= (0) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{3}{2}(-1)^2\right) + \left(-\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{3}{2}(1)^2\right) - (0)$ $= \frac{5}{2}$
4	$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 3x^2 - 2x + 2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، أي أن المنحنى لا يقطع المحور x أبدًا، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2 نختار عددًا ضمن الفترة $[0,2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$ $A = \int_{0}^{2} (3x^2 - 2x + 2)dx = (x^3 - x^2 + 2x)\|_{0}^{2}$ $= \big((2)^3 - (2)^2 + 2(2)\big) - \big((0)^3 - (0)^2 + 2(0)\big)$ $= 8$ إذن، المساحة هي: 8 وحدات مربعة.

5	$f(x) = 9 - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 9 - x^2 = 0$ $\implies (3 + x)(3 - x) = 0$ $\implies x = -3 , x = 3$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-3,3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 9 - (0)^2 = 9 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3,3]$ $A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^{3}$ $= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $= 36$ إذن، المساحة هي: 36 وحدة مربعة.

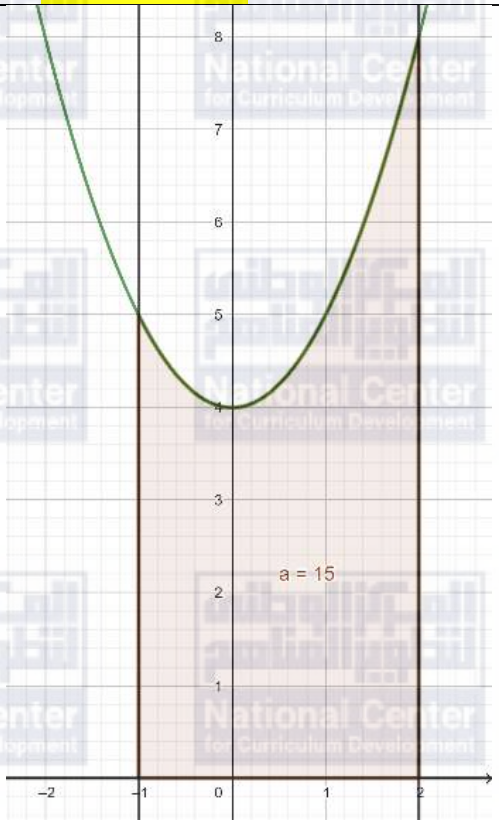
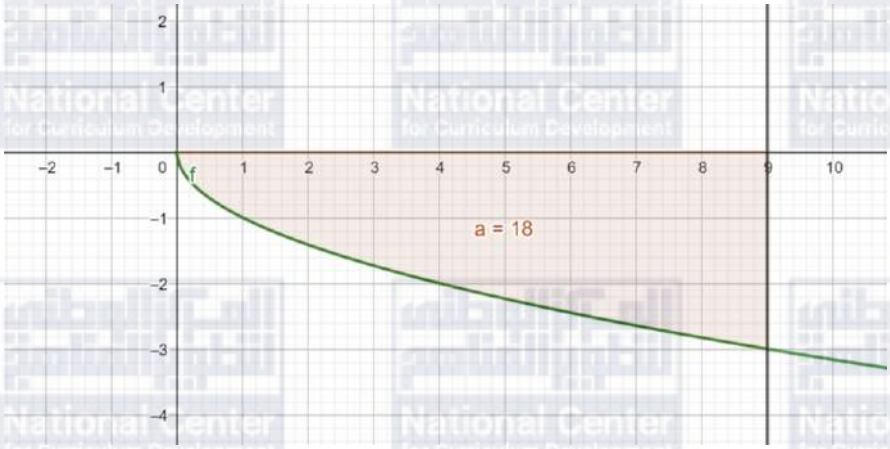
	$f(x) = x^3 + 4x$
	أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:
	$f(x) = 0 \implies x^3 + 4x = 0$ $\implies x(x^2 + 4) = 0$ $\implies x = 0$
	مميز العبارة التربيعية $(x^2 + 4)$ سالب، لذا لا أصفار لها.
	نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:
	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{8} < 0$
	بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,0]$
	نختار عددًا ضمن الفترة $[0,2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:
6	$f(1) = (1)^3 + 4(1) = 5 > 0$
	بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$
	$A = -\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$
	$= \int_{-1}^{0} (-x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$
	$= \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right)\Big\|_{0}^{2}$
	$= \left((0) - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{4}(2)^4 + 2(2)^2\right) - (0)\right)$
	$= \frac{57}{4} = 14.25$
	إذن، المساحة هي: 14.25 وحدة مربعة.

7	$f(x) = -7 + 2x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies -7 + 2x - x^2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-7) = -24$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، أي أن المنحنى لا يقطع المحور x أبدًا، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عددًا ضمن الفترة $[1,4]$، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(2) = -7 + 2(2) - (2)^2 = -7 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1,4]$ $A = -\int_1^4 (-7 + 2x - x^2)dx$ $= \int_1^4 (7 - 2x + x^2)dx$ $= \left(7x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(7(4) - (4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right) - \left(7(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= 27$ إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.
8	$f(x) = 5 - x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 5 - x = 0$ $\implies x = 5$ نختار عددًا ضمن الفترة $[3,5]$، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(4) = 5 - (4) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3,5]$ $A = \int_3^5 (5 - x)dx = \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $= \left(\left(5(5) - \frac{1}{2}(5)^2\right) - \left(5(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)\right)$ $= 2$ إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

9	$V = \int_2^5 \pi y^2 dx = \int_2^5 \pi(0.3x)^2 dx = \int_2^5 0.09\pi x^2 dx$ $= 0.03\pi x^3 \vert_2^5 = 3.75\pi - 0.24\pi = 3.51\pi$ إذن الحجم هو 3.51π وحدة مكعبة
10	$V = \int_{-1}^1 \pi y^2 dx = \int_{-1}^1 \pi(x^2+3)^2 dx = \int_{-1}^1 \pi(x^4+6x^2+9) dx$ $= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x\right)\Big\vert_{-1}^1 = \left(\frac{56}{5}\pi\right) - \left(-\frac{56}{5}\pi\right) = \frac{112}{5}\pi$ إذن الحجم هو $\frac{112}{5}\pi$ وحدة مكعبة
11	$V = \int_{-15}^{15} \pi y^2 dx = \int_{-15}^{15} \pi\left(100 - \frac{4}{9}x^2\right) dx = 100\pi x - \frac{4}{27}\pi x^3 \Big\vert_{-15}^{15}$ $= (1000\pi) - (-1000\pi) = 2000\pi$ إذن الحجم هو **6283.185** وحدة مكعبة تقريبا
12	$y = kx(4-x)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $y = 0 \Longrightarrow\ kx(4-x) = 0$ $\Longrightarrow\ x = 0\ \ or\ \ x = 4$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$ $A = \int_0^4 \big(kx(4-x)\big) dx = \int_0^4 (4kx - kx^2) dx$ $= \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big\vert_0^4$ $= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{32}{3}k$ $\frac{32}{3}k = 32 \ \Longrightarrow\ k = 3$

	$R_1 = 2 \implies -\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$ $\implies \int_{-1}^{0} f(x)dx = -2$ $R_2 = 3 \implies -\int_{3}^{4} f(x)dx = 3$ $\implies \int_{3}^{4} f(x)dx = -3$
13	$\int_{0}^{4} f(x)dx = \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$ $\implies 10 = \int_{0}^{3} f(x)dx + (-3)$ $\implies \int_{0}^{3} f(x)dx = 13$ $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx$ $= -2 + 13$ $= 11$

معمل برمجية جيوجبرا

أتدرب صفحة 89	
1	
2	

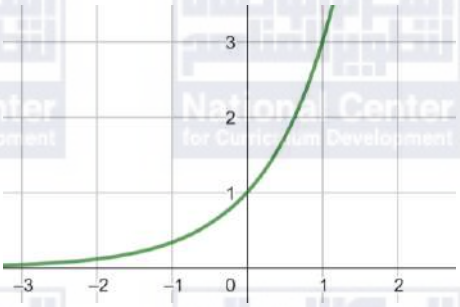
	اختبار نهاية الوحدة صفحة 90	
1	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^4 = (4) - (2) = 2$	d
2	$\int x\sqrt{3x}dx = \int \sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2\sqrt{3}}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$	a
3	$f(x) = 4x - x^2$ $4x - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(4-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad or \quad x = 4$ $A = \int_0^4 (4x - x^2)dx$	b
4	$f'(x) = 4 - 2x \Longrightarrow f(x) = \int (4 - 2x)dx = 4x - x^2 + C$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$ $f(2) = 12 \Longrightarrow 8 - 4 + C = 12 \Longrightarrow C = 8$ $f(x) = 4x - x^2 + 8$	b
5	$\int_0^2 kxdx = 6 \quad \rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big\|_0^2 = 6 \quad \rightarrow 2k = 6 \quad \rightarrow k = 3$	c
6	$\int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big\|_0^3 = 4\frac{1}{2}$	c
7	$\int_2^4 10x^3dx = \frac{5}{2}x^4\Big\|_2^4 = \frac{5}{2}(256) - \frac{5}{2}(16) = 600$	
8	$\int_1^4 2\sqrt{x}dx = \int_1^4 2x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^4 = \left(\frac{32}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{28}{3}$	
9	$\int_9^{16} \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_9^{16} 20x^{-\frac{1}{2}}dx = 40x^{\frac{1}{2}}\Big\|_9^{16} = 40(4) - 40(3) = 40$	
10	$\int_3^4 (6x^2 - 4x)dx = 2x^3 - 2x^2\|_3^4 = (96) - (36) = 60$	
11	$\int_0^1 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\Big\|_0^1 = \left(-\frac{1}{4}\right) - (0) = -\frac{1}{4}$	
12	$\int_{-3}^{-1} \frac{x+1}{x^3}dx = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int_{-3}^{-1} (x^{-2} + x^{-3})dx$ $= -x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}\Big\|_{-3}^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{18}\right) = \frac{2}{9}$	

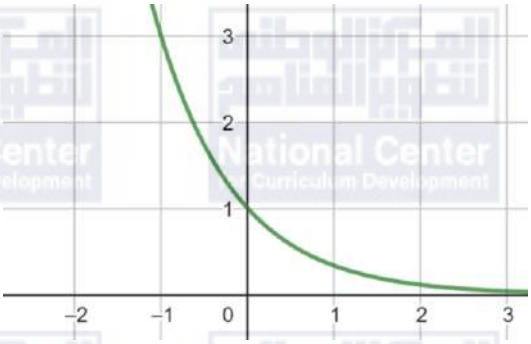
13	$V = \int_0^4 \pi y^2 dx = \int_0^4 \pi x dx = \frac{\pi}{2}x^2\Big\|_0^4 = 8\pi$
14	$\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$
15	$\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x} + C$
16	$\int \frac{4 + 2\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \left(4x^{-2} + 2x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = -4x^{-1} - 4x^{-\frac{1}{2}} + C$ $= -\frac{4}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$
17	$\int \frac{4 - x^2}{2 + x}dx = \int \frac{(2 - x)(2 + x)}{2 + x}dx = \int (2 - x)dx = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$
18	$\int (2x - 3)^5 dx = \frac{1}{12}(2x - 3)^6 + C$
19	$\int \sqrt{x + 1}dx = \int (x + 1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x + 1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} + C$
20	$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x} + C$
21	$\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x - 2}\right)dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
22	$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}x + C$ $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{2}x + C$
23	$(a)(a^2) = a^3$= العرض × الطول = مساحة المستطيل $A = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big\|_0^a = \frac{1}{3}a^3$ $A = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}(a^3) = \frac{1}{3} \times$ (مساحة المستطيل)

24	$f''(x) = (ax+b)^3 \rightarrow f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{1}{4a}(ax+b)^4 + C$ $f(x) = \int f'(x)dx = \frac{1}{20a^2}(ax+b)^5 + Cx + K$
25	$v(t) = 8 + 4t$ $s(t) = \int (8+4t)dt = 8t + 2t^2 + C$ $s(0) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow\ s(t) = 8t + 2t^2$
26	$s(2) = 8(2) + 2(2)^2 = 24\ m$
27	$A = \int_{-2}^{2} (2 + 0.1x^4)dx = 2x + \frac{0.1}{5}x^5\Big\|_{-2}^{2} = 9.28$ إذن مساحة المنطقة هي 9.28 وحدة مربعة
28	$f'(x) = 2x + 6$ $f(x) = \int (2x+6)dx = x^2 + 6x + C$ $f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$ $f''(x) = 2 \ \rightarrow f''(-3) = 2 > 0 \ \rightarrow f(-3)$ قيمة صغرى $f(-3) = 0 \rightarrow 9 - 18 + C = 0 \rightarrow C = 9$ $f(x) = x^2 + 6x + 9$

الوحدة السادسة: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الدرس الأول: الاقترانات الأسية

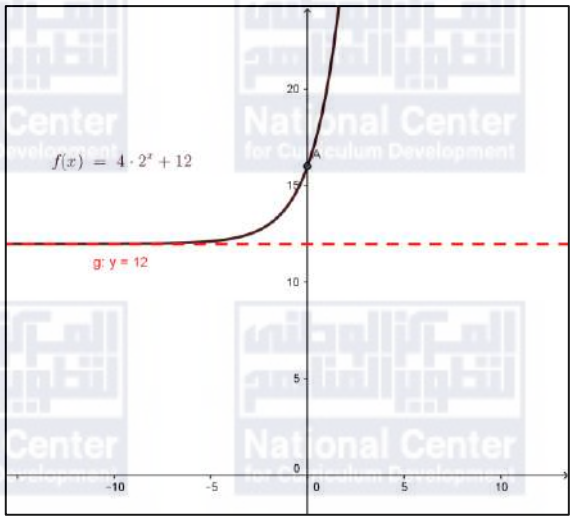
مسألة اليوم صفحة 94	
	$P(t) = 325(0.25)^t$ $P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32\ \mu g/mL$
أتحقق من فهمي صفحة 95	
a	$f(4) = 3^4$ $= 81$
b	$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $= 3$
أتحقق من فهمي صفحة 97	
a	$f(x) = 3^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x المقطع y لهذا الاقتران هو 1 لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x الاقتران $f(x)$ متزايد الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

	$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
b	 مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$ لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x المقطع y لهذا الاقتران هو 1 لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x الاقتران $f(x)$ متناقص الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

أتحقق من فهمي صفحة 99

a

$f(x) = 4(2^x) + 12$

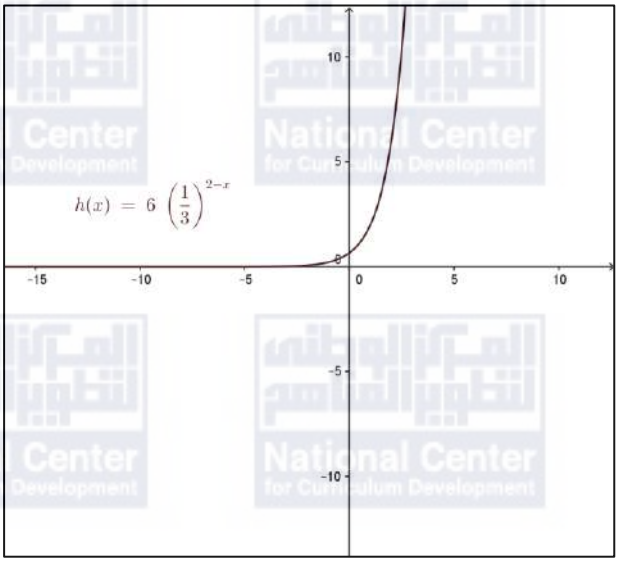


مجال الإقتران الأعداد الحقيقية R

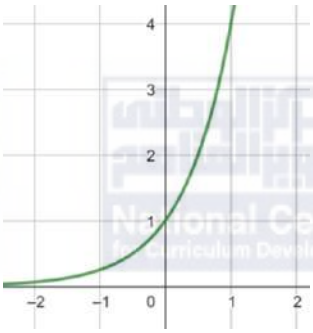
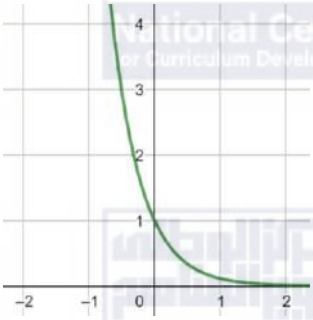
المدى هو الفترة $(12,\infty)$

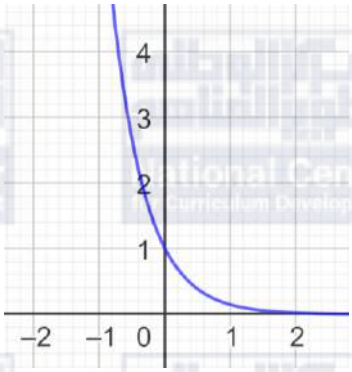
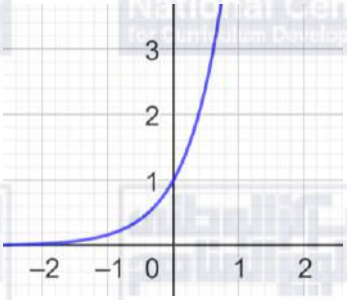
خط التقارب الافقي y=12

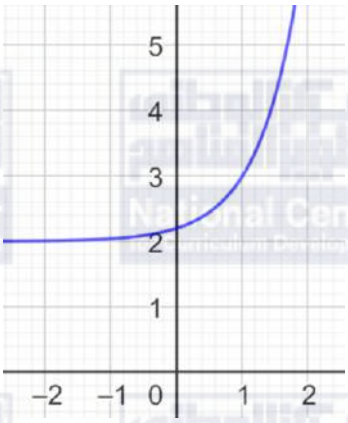
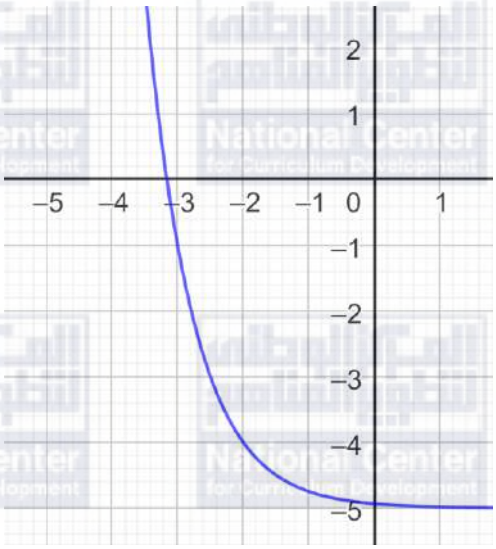
الاقتران متزايد

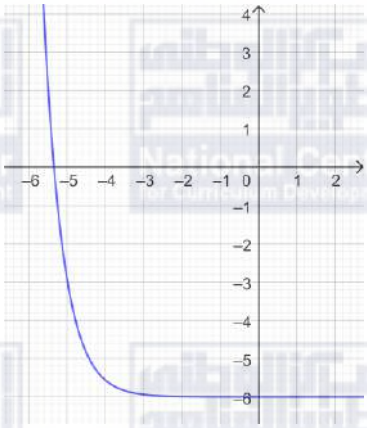
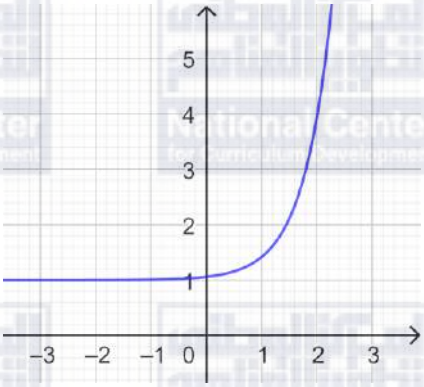
b	$f(x) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$  مجال الإقتران الأعداد الحقيقية R المدى هو الفترة $(0,\infty)$ خط التقارب الافقي y=0 الاقتران متزايد
أتحقق من فهمي صفحة 100	
a	$f(5) = 500(2)^5$ $= 500(32)$ $= 16000$ عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية
b	$4000 = 500(2)^x$ $8 = (2)^x$ $(2)^3 = (2)^x$ $x = 3$ بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية
أتدرب وأحل المسائل صفحة 101	

1	$f(3) = (11)^3$ $= 1331$
2	$f(1) = -5(2)^1$ $= -5(2)$ $= -10$
3	$f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2$ $= 3\left(\frac{1}{49}\right)$ $= \frac{3}{49}$
4	$f(4) = -(5)^4 + 4$ $= -(625) + 4$ $= -621$
5	$f(5) = (3)^5 + 1$ $= 243 + 1$ $= 244$
6	$f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3$ $= \frac{1}{81} - 3$ $= \frac{1}{81} - \frac{243}{81}$ $= -\frac{242}{81}$

7	$f(x) = 4^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x المقطع y لهذا الاقتران هو 1 لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x الاقتران $f(x)$ متزايد
8	$f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x المقطع y لهذا الاقتران هو 1 لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x الاقتران $f(x)$ متناقص

9	$f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0,\infty)$ لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x المقطع y لهذا الاقتران هو 1 لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x الاقتران $f(x)$ متناقص
10	$f(x)=(6)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0,\infty)$ لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x المقطع y لهذا الاقتران هو 1 لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x الاقتران $f(x)$ متزايد

11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ الاقتران $f(x)$ متناقص

13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ الاقتران $f(x)$ متزايد
15	$f(0) = 7000(1.2)^0$ $= 7000(1)$ $= 7000$ عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية
16	$f(12) = 7000(1.2)^{12}$ ≈ 62413 عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبًا

17	$10080 = 7000(1.2)^x$ $1.44 = (1.2)^x$ $(1.2)^2 = (1.2)^x$ $x = 2$ بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية
18	$f(1) = 100(0.97)^1$ $= 100(0.97)$ $= 97$ نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$f(3) = 100(0.97)^3$ ≈ 91 نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%
20	$P(1) = 100(0.3)^1$ $= 100(0.3)$ $= 30$ نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأوليّ للمرض هي 30%
21	$9 = 100(0.3)^t$ $0.09 = (0.3)^t$ $(0.3)^2 = (0.3)^t$ $t = 2$ بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%

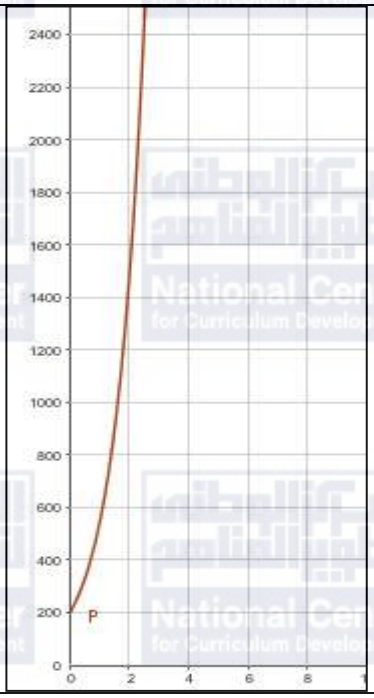
22	$f(x) = ab^x$ من التمثيل البياني نلاحظ أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,1)$ ، إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $1 = ab^0$ $1 = a \times 1$ $a = 1$ نلاحظ أيضًا أن النقطة $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $\frac{1}{4} = ab^1$ $\frac{1}{4} = (1)b^1$ $b = \frac{1}{4}$ ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
23	الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$ $= \frac{b^{x+1}}{b^x}$ $= b$

الدرس الثاني: النمو والاضمحلال الأسّي

مسألة اليوم صفحة 103	
	$A(t) = a(1+r)^t = 10.8(1+0.026)^t$ $t = 2030 - 2020 = 10$ $A(10) = 10.8(1+0.026)^{10} \approx 13.96$ العدد التقريبي للسكان عام 2030 م هو 13.96 مليون نسمة
أتحقق من فهمي صفحة 104	
a	$A(t) = 327(1+0.18)^t$ $A(t) = 327(1.18)^t$
b	$A(3) = 327(1.18)^3$ ≈ 537 عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريبًا.
أتحقق من فهمي صفحة 106	
a	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 28500(1-0.05)^t$ $A(t) = 28500(0.95)^t$
b	$A(4) = 28500(0.95)^4$ ≈ 23213.43 ثمن السيّارة بعد 4 سنوات هو 23213.43 دينارًا تقريبًا
أتحقق من فهمي صفحة 107	
	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 5000\left(1+\frac{0.0225}{2}\right)^{2\times 5}$ ≈ 5591.85 جملة المبلغ بعد 5 سنوات: 5591.85 دينارًا تقريبًا.
أتحقق من فهمي صفحة 108	

a	$P(t) = 34.706e^{0.0097t}$ t=0 تكون 2015 عام $\Rightarrow P(0) = 34.706e^{0} = 34.706$
b	t=15 تكون 2030 عام $\Rightarrow P(15) = 34.706e^{0.0097\times15}$ $= 34.706e^{0.1455}$ ≈ 40
أتحقق من فهمي صفحة 109	
	$A = Pe^{rt}$ $= 6300e^{0.032\times9}$ ≈ 8402.67 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: 8402.67 دينارًا تقريبًا.
أتدرب وأحل المسائل صفحة 110	
1	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 150(1+0.08)^t$ $A(t) = 150(1.08)^t$
2	$A(5) = 150(1.08)^5$ ≈ 220 عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريبًا.
3	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 50(1+0.15)^t$ $A(t) = 50(1.15)^t$
4	$t = 2025 - 2019 = 6$ $A(6) = 50(1.15)^6$ ≈ 115.653 عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115.653 ألف شخص تقريبًا.

5	$A(t) = \mathrm{a}(1-r)^t$ $A(t) = 17350(1-0.035)^t$ $A(t) = 17350(0.965)^t$
6	$A(3) = 17350(0.965)^3$ ≈ 15591.27 ثمن السيّارة بعد 3 سنوات: 15591.27دينارًا تقريبًا.
7	$A(t) = \mathrm{a}(1-r)^t$ $A(t) = 15275(1-0.27)^t$ $A(t) = 15275(0.73)^t$
8	$A(7) = 15275(0.73)^7$ ≈ 1687 عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريبًا.
9	$A(t) = \mathrm{a}(1-r)^t$ $A(5) = 1550(1-0.25)^5$ $= 1550(0.75)^5$ ≈ 368 العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريبًا.
10	$A = \mathrm{P}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12t}$
11	$A = 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12\times 5}$ ≈ 1974.37 جملة المبلغ بعد 5 سنوات: 1974.37 دينارًا تقريبًا.

12	$A = \mathrm{P}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365t}$
13	$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365\times 6}$ ≈ 10262.45 جملة المبلغ بعد 6 سنوات: 10262.45 دينارًا تقريبًا.
14	$P(t) = 200(e)^t$ $P(3) = 200(e)^3 \approx 4017$
15	
16	$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036\times 7}$ ≈ 11579.36 جملة المبلغ بعد 7 سنوات: 11579.36 دينارًا تقريبًا.

17	$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049\times 9}$ ≈ 12744.94 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: 12744.94 دينارًا تقريبًا.
18	الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125 $A = 250\left(1 + \frac{0.0125}{4}\right)^{4(3)} \approx 259.54$
19	النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1+\frac{200}{100}$ =3 عدد الإصابات بعد t أسبوعًا هو: $A(t) = 12(1 + r)^t = 12(3)^t$

الدرس الثالث: الاقترانات اللوغاريتمية

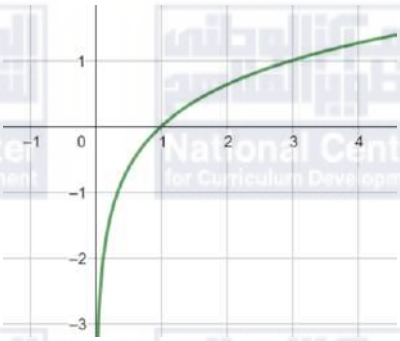
مسألة اليوم صفحة 112	
الرمز log هو اختصار لكلمة logarithm (لوغاريتم) وهو معكوس الاقتران الأسي. فإذا كان $b^x = a$ فنقول أن لوغاريتم a للأساس b هو x، وبالرموز نكتب $\log_b a = x$.	
أتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 113	
a	$\log_2 16 = 4 \quad \rightarrow \quad 2^4 = 16$
b	$\log_7 7 = 1 \quad \rightarrow \quad 7^1 = 7$
c	$\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5 \quad \rightarrow \quad 3^{-5} = \frac{1}{243}$
d	$\log_9 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 9^0 = 1$
أتحقق من فهمي مثال2 صفحة 113	
a	$7^3 = 343 \quad \rightarrow \quad \log_7 343 = 3$
b	$49^{\frac{1}{2}} = 7 \quad \rightarrow \quad \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
C	$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \quad \rightarrow \quad \log_2 \frac{1}{32} = -5$
d	$17^0 = 1 \quad \rightarrow \quad \log_{17} 1 = 0$
أتحقق من فهمي صفحة 114	
a	$\log_5 25 = y$ $5^y = 25$ $5^y = 5^2$ $y = 2$ إذن $\log_5 25 = 2$
b	$\log_8 \sqrt{8} = y$ $8^y = \sqrt{8}$ $8^y = 8^{\frac{1}{2}}$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$

c	$\log_{81} 9 = y$ $81^y = 9$ $9^{2y} = 9^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
d	$\log_3 \frac{1}{27} = y$ $3^y = \frac{1}{27}$ $3^y = \frac{1}{3^3}$ $3^y = 3^{-3}$ $y = -3$ إذن $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
أتحقق من فهمي صفحة 115	
a	$\log_2 1 = 0$
b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$
c	$\log_9 9 = 1$
d	$8^{\log_8 13} = 13$

أتحقق من فهمي صفحة 31

a

$f(x) = \log_3 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

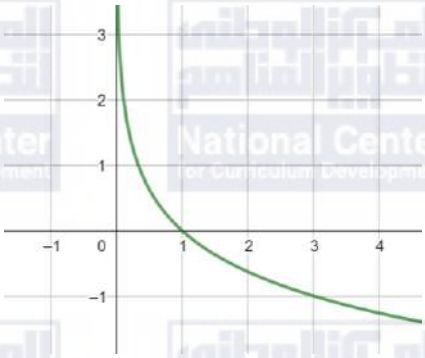
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

b

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

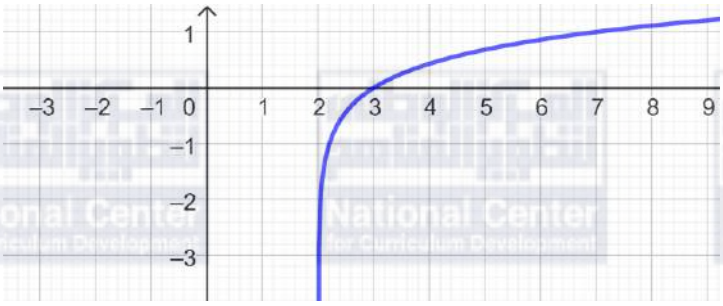
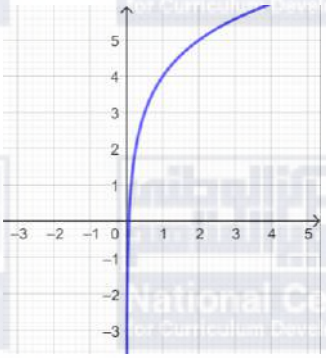
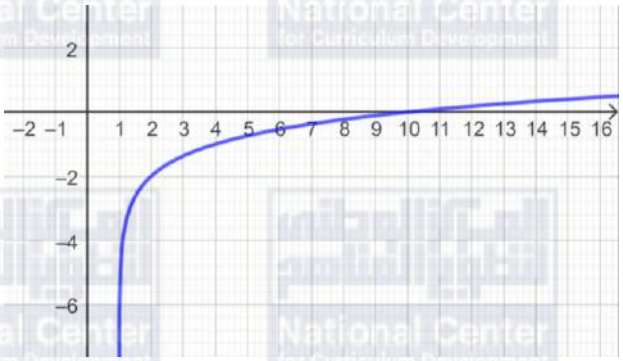
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

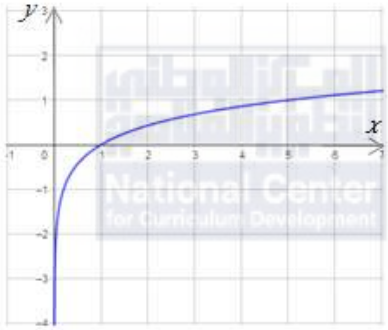
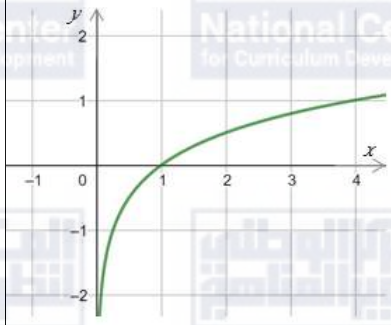
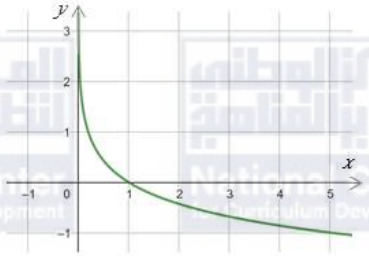
الاقتران متناقص

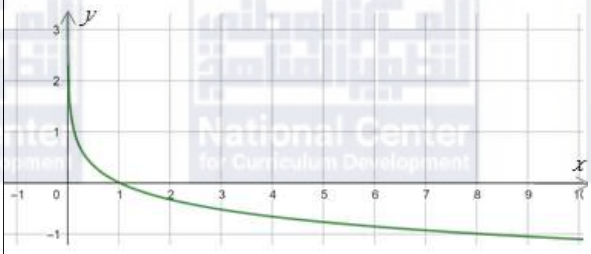
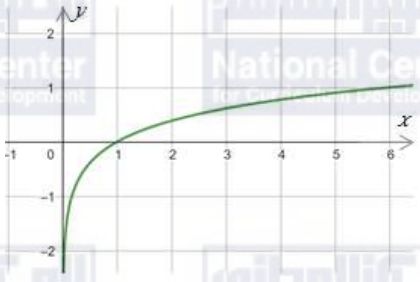
أتحقق من فهمي صفحة 120

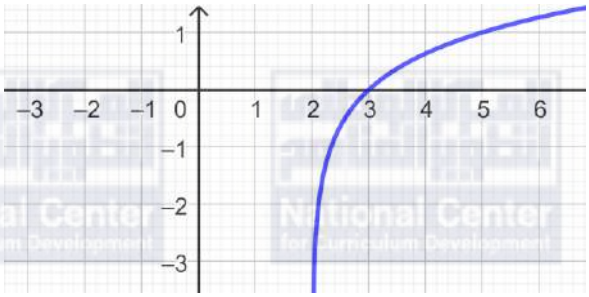
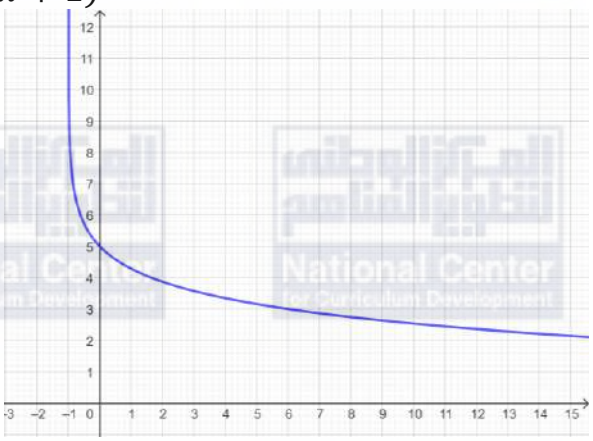
a	$f(x) = \log_5(x-2)$  مجال الاقتران هو $(2, \infty)$ المدى هو R خط التقارب الرأسي معادلته $x = 2$ الاقتران متزايد
b	$f(x) = \log_2 x + 4$  مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ المدى هو R خط التقارب الرأسي معادلته $x = 0$ الاقتران متزايد
c	$f(x) = \log_3(x-1) - 2$  مجال الاقتران هو $(1, \infty)$ المدى هو R خط التقارب الرأسي معادلته $x = 1$ الاقتران متزايد

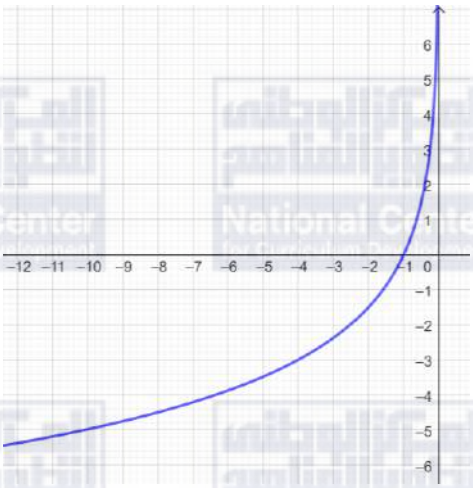
أتدرب وأحل المسائل صفحة 120	
1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$
4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$
7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$
10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$
13	$\log_3 81 = \log_3 3^4$ $= 4$
14	$\log_{25} 5 = y$ $25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5$ $= 5$ إذن $\log_2 32 = 5$
16	$\log_{49} 343 = y$ $49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$ إذن $\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$

18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{y} = 4$ $4^{-y} = 4^{1}$ $-y = 1$ $y = -1$ إذن $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}}$ $= -\frac{7}{2}$
22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}}$ $= \frac{1}{5}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$
24	$8^{\log_8 5} = 5$

25	$f(x) = \log_5 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
26	$f(x) = \log_4 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
27	$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص

28	$f(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص
29	$f(x)=\log_{10} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
30	$f(x)=\log_{6} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد

31	$f(x) = \log_3(x-2)$  مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 3 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$ الاقتران متزايد
32	$f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$  مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R لا يوجد مقطع x ، والمقطع y هو 5 لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = -1$ الاقتران متناقص

33	$f(x) = -3\log_4(-x)$  مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو -1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
34	$f(x) = \log_a x$ $f(32) = \log_a 32$ $5 = \log_a 32$ $a^5 = 32$ $a^5 = (2)^5$ $a = 2$
35	$f(x) = \log_c x$ $f\left(\frac{1}{81}\right) = \log_c \frac{1}{81}$ $-4 = \log_c \frac{1}{81}$ $c^{-4} = \frac{1}{81}$ $\frac{1}{c^4} = \frac{1}{81}$ $c^4 = 81 \rightarrow c = \pm\sqrt[4]{81} \rightarrow c = \pm 3$ ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا فإن: $c = 3$

36	$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ $P(4) = 10 + 20\log_5(4+1)$ $= 10 + 20\log_5 5$ $= 10 + 20(1)$ $= 30$ $P(24) = 10 + 20\log_5(24+1)$ $= 10 + 20\log_5 25$ $= 10 + 20\log_5 5^2$ $= 10 + 20(2)$ $= 50$ $P(124) = 10 + 20\log_5(124+1)$ $= 10 + 20\log_5 125$ $= 10 + 20\log_5 5^3$ $= 10 + 20(3)$ $= 70$
37	القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 30000 من بيع المنتج القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 50000 من بيع المنتج القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 70000 من بيع المنتج
38	$f(x) = \log_3 x$ c لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة (3, 1) حيث $f(3) = \log_3 3 = 1$
39	$f(x) = \log_3(-x)$ b لأن مجال الاقتران هو $(-\infty, 0)$، ويمر منحناه بالنقطة (-3,1) حيث $f(-3) = \log_3(-(-3)) = \log_3(3) = 1$

40	$g(x) = -\log_3 x$ a لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة (3,-1) حيث $f(3) = -\log_3 3 = -1$
41	المقطع x عندما $f(x) = 0$ $f(x) = \log(x - k)$ $0 = \log(x - k)$ $x - k = 1 \Rightarrow x = k + 1$
42	$\log_5 28 = h \Rightarrow 5^h = 28 \Rightarrow h > 2$ $\log_6 32 = y \Rightarrow 6^y = 32 \Rightarrow y < 2$ $\log_7 40 = z \Rightarrow 7^z = 40 \Rightarrow z < 2$ إذن العدد الأكبر هو $\log_5 28$
43	الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

الدرس الرابع: قوانين اللوغاريتمات

مسألة اليوم صفحة 123	
	$L = 10\log_{10} R$ $L = 10\log_{10}(100 \times 10^6)$ $= 10\log_{10} 10^8 = 10 \times 8 = 80$ شدة الصوت تساوي 80 ديسيبل
أتحقق من فهمي صفحة 125	
a	$\log_b 14 = \log_b(2 \times 7)$ $= \log_b 2 + \log_b 7$ $\approx 0.43 + 1.21$ ≈ 1.64
b	$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7$ $\approx 0.43 - 1.21$ ≈ -0.78
c	$\log_b 32 = \log_b 2^5$ $= 5\log_b 2$ $\approx 5 \times 0.43$ ≈ 2.15
d	$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49$ $= 0 - \log_b 7^2$ $= 0 - 2\log_b 7$ $\approx 0 - 2 \times 1.21$ ≈ -2.42
أتحقق من فهمي صفحة 126	
a	$\log_2 a^2 b^9 = \log_2 a^2 + \log_2 b^9$ $= 2\log_2 a + 9\log_2 b$
b	$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$ $= 3\log_5(x+1) - \log_5 8$

c	$\log_3 \frac{x^7y^3}{z^5} = \log_3 x^7y^3 - \log_3 z^5$ $= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$ $= 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$
d	$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7b^2}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{3}\log_b \frac{x^7b^2}{y^5}$ $= \frac{1}{3}(\log_b x^7b^2 - \log_b y^5)$ $= \frac{1}{3}(\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5)$ $= \frac{1}{3}(7\log_b x + 2\log_b b - 5\log_b y)$ $= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3}\log_b b - \frac{5}{3}\log_b y$ $= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\log_b y$
أتحقق من فهمي صفحة 127	
a	$\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3$ $= \log_5 ab^3$
b	$5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b x^5y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b \frac{x^5y^{\frac{1}{2}}}{z^9}$ $= \log_b \frac{x^5\sqrt{y}}{z^9}$

أتحقق من فهمي صفحة 129

$$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$$

$$M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1)$$
$$= 92 - 28\log_{10} 30$$
$$= 92 - 28\log_{10}(10 \times 3)$$
$$= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3)$$
$$\approx 92 - 28(1 + 0.4771)$$
$$\approx 92 - 28(1.4771)$$
$$\approx 92 - 41.3588$$
$$\approx 51$$

النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا هي 51% تقريبًا

أتدرب وأحل المسائل صفحة 129

1

$$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$$
$$\approx 0.699 - 0.778$$
$$\approx -0.079$$

2

$$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$$

3

$$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$$
$$\approx 0 - 0.778$$
$$\approx -0.778$$

4	$\log_a 900 = \log_a 30^2$ $= 2\log_a 30$ $= 2\log_a(5 \times 6)$ $= 2(\log_a 5 + \log_a 6)$ $\approx 2(0.699 + 0.778)$ $\approx 2 \times 1.477$ ≈ 2.954
5	$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5}$ $= \log_a 6 - \log_a 5$ $\approx 0.778 - 0.699$ ≈ 0.079
6	$\log_a(6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2$ $= \log_a 6 + 2\log_a a$ $\approx 0.778 + 2$ ≈ 2.778
7	$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2}$ $= \log_a 5^{\frac{2}{4}}$ $= \log_a 5^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a 5$ $\approx \frac{1}{2} \times 0.699$ ≈ 0.350
8	$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699 \times 0.778$ ≈ 0.544
9	$\log_a x^2 = 2\log_a x$

10	$\log_a\left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc$ $= \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$ $= \log_a a - \log_a b - \log_a c$ $= 1 - \log_a b - \log_a c$
11	$\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y}$ $= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$
12	$\log_a \frac{1}{x^2y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2)$ $= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y)$ $= -2\log_a x - 2\log_a y$
13	$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a\left(\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}\right)$ $= \log_a 2x$ $= \log_a 2 + \log_a x$
14	$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3}$ $= \log_a 1 - \log_a x^2y^3$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3)$ $= 0 - (2\log_a x + 3\log_a y)$ $= -2\log_a x - 3\log_a y$
15	$\log_a(x+y-z)^7 = 7\log_a(x+y-z)$

16	$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}}$ $= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}}$ $= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}}$ $= \log_a \frac{x^6}{yz^2}$ $= \log_a x^6 - \log_a yz^2$ $= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$ $= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z)$ $= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$
17	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
18	$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$
19	$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $= \log_a \frac{1}{x}$
20	$\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)}$ $= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$ $= \log_a(x-2)$
21	$2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$ $= \log_b \frac{x^2 \sqrt[3]{z}}{y^3}$
22	$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$

23	$f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$ $f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2)$ $= 29 + 48.8\log_6 12$ $= 29 + 48.8\log_6(6\times 2)$ $= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$ $\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869)$ $\approx 29 + 48.8(1.3869)$ $\approx 29 + 67.68072$ ≈ 97 النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريبًا
24	$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2}$ $= \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6}$ $= \frac{3}{2}$
25	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
26	$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b(b-3)(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b \frac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)}$ $= \log_b \frac{(b-3)\times b(b+3)}{(b-3)(b+3)}$ $= \log_b b$ $= 1$

الدرس الخامس: المعادلات الأسّية واللوغاريتمية

مسألة اليوم صفحة 131	
	$A(t) = 10e^{-0.0862t}$ $0.5 = 10e^{-0.0862t}$ $0.05 = e^{-0.0862t}$ $-0.0862t = \ln 0.05$ $t = -\frac{\ln 0.05}{0.0862} \approx 35$ بعد حوالي 35 يومًا سيظل من هذه العينة 0.5 g
أتحقق من فهمي صفحة 132	
a	$\log 13 \approx 1.1$
b	$\log(3.1 \times 10^4) \approx 4.5$
c	$\ln 0.25 \approx -1.4$
أتحقق من فهمي صفحة 133	
a	$\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$
b	$\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$
أتحقق من فهمي صفحة 137	
	$5^x = 8$
a	بأخذ اللوغاريتم للطرفين $\log 5^x = \log 8 \Rightarrow x \log 5 = \log 8$ $\Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 5} \approx 1.2920$

b	$4e^{2x} - 3 = 2$ $4e^{2x} = 5$ $e^{2x} = \frac{5}{4}$ $\ln e^{2x} = \ln 1.25$ $2x \approx 0.2231$ $x \approx 0.1116$
c	$2^{x-1} = 3^{3x+2}$ $2^x \times 2^{-1} = 3^{3x} \times 3^2$ $\frac{2^x}{2} = 27^x \times 9$ $\left(\frac{2}{27}\right)^x = 18$ $x \log\left(\frac{2}{27}\right) = \log 18$ $x = \frac{\log 18}{\log\left(\frac{2}{27}\right)} \approx -1.8128$
d	$9^x + 3^x - 20 = 0$ بفرض $y = 3^x$ $y^2 + y - 20 = 0$ $(y+5)(y-4) = 0$ $y = -5 \Rightarrow 3^x = -5$ مرفوض أو $y = 4 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow \log_3 4 = x$ $\Rightarrow x \approx 1.2619$

أتحقق من فهمي صفحة 139

$$9 = 6.5(1.014)^t$$

$$\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$$

$$\ln\frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t$$

$$\ln\frac{9}{6.5} = t\ln 1.014$$

$$t = \frac{\ln\frac{9}{6.5}}{\ln 1.014} \approx 23$$

إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد 23 سنة تقريبًا من عام 2006

أتحقق من فهمي صفحة 141

a

$$5 + 2\ln x = 4$$

$$\ln x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = e^{-1}$$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

b

$$\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$$

$$\log_5(x+6)(x+2) = 1$$

$$x^2 + 8x + 12 = 5^1$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$(x+1)(x+7) = 0$$

$x = -7$ مرفوض

$x = -1$ أو

أتحقق من فهمي صفحة 142

	$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$ $4000 = \frac{\ln p}{-0.000121}$ $\ln p = -0.484$ $p = e^{-0.484} \approx 0.62 = 62\%$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 142	
1	$\log 19 \approx 1.3$
2	$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$
3	$\ln 3.1 \approx 1.1$
4	$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$
5	$\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$
6	$\ln 5 \approx 1.6$
7	$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$
8	$\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} \approx -2.58$
9	$\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$
10	$\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$
11	$\log 1000 = 3$
12	$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

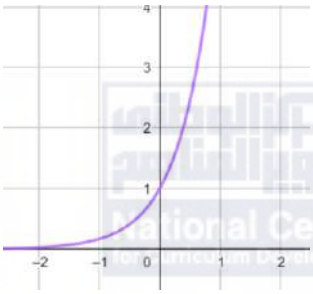
13	$6^x = 121$ $\log 6^x = \log 121$ $x \log 6 = \log 121$ $\rightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$
14	$-3e^{4x} = -27$ $e^{4x} = 9$ $\ln e^{4x} = \ln 9$ $4x = \ln 9$ $x = \frac{1}{4}\ln 9 \approx 0.5493$
15	$5^{7x-2} = 3^{2x}$ $\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$ $(7x-2)\log 5 = (2x)\log 3$ $7x \log 5 - 2\log 5 = 2x \log 3$ $7x \log 5 - 2x \log 3 = 2\log 5$ $x(7\log 5 - 2\log 3) = 2\log 5$ $x = \frac{2\log 5}{7\log 5 - 2\log 3} \approx 0.3549$
16	$25^x + 5^x - 42 = 0$ $(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$ $u^2 + u - 42 = 0$ $(u+7)(u-6) = 0$ $u = -7$ أو $u = 6$ $5^x = -7$ أو $5^x = 6$ المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x $5^x = 6 \rightarrow x\log 5 = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$

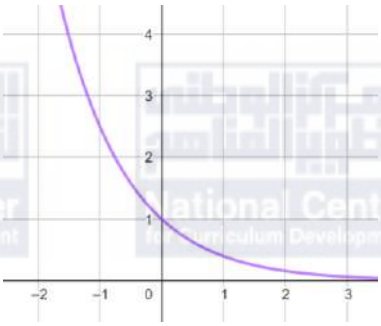
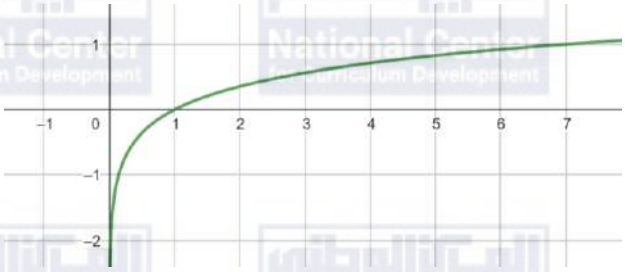
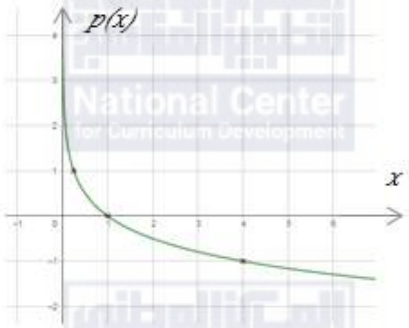
17	$2(9)^x = 32$ $9^x = 16$ $\log 9^x = \log 16$ $x\log 9 = \log 16$ $\rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$
18	$27^{2x+3} = 2^{x-5}$ $\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$ $(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$ $2x\log 27 + 3\log 27 = x\log 2 - 5\log 2$ $2x\log 27 - x\log 2 = -3\log 27 - 5\log 2$ $x(2\log 27 - \log 2) = -3\log 27 - 5\log 2$ $x = \frac{-3\log 27 - 5\log 2}{2\log 27 - \log 2} \approx -2.2638$
19	$97 = 873e^{-0.078t}$ $\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$ $\ln\frac{97}{873} = \ln e^{-0.078t}$ $\ln\frac{97}{873} = -0.078t$ $t = \frac{\ln\frac{97}{873}}{-0.078} \approx 28$ بعد 28 سنة تقريبًا يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا
20	$\log(x+5) - \log(x-3) = \log 2$ $\log\left(\frac{x+5}{x-3}\right) = \log 2$ $\frac{x+5}{x-3} = 2$ $x + 5 = 2x - 6 \Rightarrow x = 11$

21	$\ln(x+8)+\ln(x-1)=2\ln x$ $\ln(x+8)(x-1)=\ln x^2$ $(x+8)(x-1)=x^2$ $x^2+7x-8=x^2 \Rightarrow 7x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{7}$
22	$\log_3(\log_4 x)=0 \Rightarrow \log_4 x=3^0$ $\Rightarrow \log_4 x=1 \Rightarrow x=1$
23	$\ln x^2=(\ln x)^2$ $2\ln x-(\ln x)^2=0$ $\ln x\,(2-\ln x)=0$ $\Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$ أو $\ln x=2 \Rightarrow x=e^2$
24	$2\log 50=3\log 25+\log(x-2)$ $2(\log 5+\log 10)=3\log 5^2+\log(x-2)$ $2\log 5+2=6\log 5+\log(x-2)$ $2=4\log 5+\log(x-2)$ $\log(x-2)\,(5^4)=2$ $(x-2)(625)=10^2$ $625x-1250=100 \Rightarrow x=\frac{1350}{625}=2.16$

25	$2P = Pe^{0.05t}$ $2 = e^{0.05t}$ $\ln 2 = \ln e^{0.05t}$ $\ln 2 = 0.05t$ $t = \frac{\ln 2}{0.05} \approx 14$ بعد 14 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي
26	$3P = Pe^{0.05t}$ $3 = e^{0.05t}$ $\ln 3 = \ln e^{0.05t}$ $\ln 3 = 0.05t$ $t = \frac{\ln 3}{0.05} \approx 22$ بعد 22 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي
28	$f(x) = e^{0.5x+3}$ بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى $f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$ $k = e^2 \approx 7.39$ بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى $f(h) = e^{0.5h+3}$ $100 = e^{0.5h+3}$ $\ln 100 = \ln e^{0.5h+3}$ $\ln 100 = 0.5h + 3$ $0.5h = -3 + \ln 100$ $h = \frac{-3 + \ln 100}{0.5} \approx 3.2$

29	$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$ $3^x\left(3^x + \frac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5$ $3^{2x} + 4 = 5(3^x)$ $3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$ $(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$ $u^2 - 5u + 4 = 0$ $(u-4)(u-1) = 0$ $u = 4$ أو $u = 1$ $3^x = 4$ أو $3^x = 1$ $3^x = 4 \quad \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$ $3^x = 1 \quad \rightarrow x = \log_3 1 = 0$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 144	
1	d
2	c
3	A
4	C
5	A
6	B
7	B
8	A
9	B
10	$\log_5 16 = \log_5 4^2$ $= 2\log_5 4$ $= 2k$
11	$\log_5 256 = \log_5 4^4$ $= 4\log_5 4$ $= 4k$
12	$f(x) = 6^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

13	$g(x) = (0.4)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
14	$h(x) = \log_7 x$  مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
15	$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ $x = \left(\frac{1}{4}\right)^y$ | 4 | 1 | $\frac{1}{4}$ y | -1 | 0 | 1 (x, y) | (4, -1) | (1,0) | (0.25, 1)  مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
16	$8^x = 2$ $2^{3x} = 2^1$ $3x = 1$ $x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$

17	$-3e^{4x+1} = -96$ $e^{4x+1} = 32$ $\ln e^{4x+1} = \ln 32$ $4x + 1 = \ln 32$ $4x = -1 + \ln 32$ $x = \frac{-1 + \ln 32}{4} \approx 0.6164$
18	$11^{2x+3} = 5^x$ $\log 11^{2x+3} = \log 5^x$ $(2x + 3)\log 11 = (x)\log 5$ $2x \log 11 + 3 \log 11 = x \log 5$ $2x \log 11 - x \log 5 = -3 \log 11$ $x(2 \log 11 - \log 5) = -3 \log 11$ $x = \frac{-3 \log 11}{2 \log 11 - \log 5} \approx -2.2577$
19	$49^x + 7^x - 72 = 0$ $(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$ $u^2 + u - 72 = 0$ $(u + 9)(u - 8) = 0$ $u = -9$ أو $u = 8$ $7^x = -9$ أو $7^x = 8$ المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x $7^x = 8 \longrightarrow \log 7^x = \log 8 \longrightarrow x \log 7 = \log 8 \longrightarrow x = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$
20	$\log_4(x + 3) + \log_4(x - 3) = 2$ $\Rightarrow \log_4(x + 3)(x - 3) = 2$ $\Rightarrow x^2 - 9 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

21	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 2500\left(1+\frac{0.042}{12}\right)^{12\times 15} \approx 4688.87$ جملة المبلغ بعد 15 سنة هي 4688.87 JD تقريبًا
22	$A = Pe^{rt}$ $A = 800e^{0.045\times 5} \approx 1001.86$ جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD1001.86 تقريبًا
23	$v(t) = 30e^{0.1t}$ $10000 = 30e^{0.1t}$ $\frac{10000}{30} = e^{0.1t}$ $\ln\frac{1000}{3} = \ln e^{0.1t}$ $\ln\frac{1000}{3} = 0.1t$ $t = \frac{\ln\frac{10000}{30}}{0.1} \approx 58.1$ الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريبًا
24	$N(t) = 100e^{0.045t}$ $N(0) = 100e^{0.045\times 0} = 100$ العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيّنة هو 100 خلية
25	$N(5) = 100e^{0.045\times 5} \approx 125$ عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريبًا
26	$1400 = 100e^{0.045t}$ $14 = e^{0.045t}$ $\ln 14 = \ln e^{0.045t}$ $\ln 14 = 0.045t$ $t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$ بعد 59 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية

27	$200 = 100e^{0.045t}$ $2 = e^{0.045t}$ $\ln 2 = \ln e^{0.045t}$ $\ln 2 = 0.045t$ $t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$ بعد 15 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي
28	$A(h) = a(1-r)^h$ $A(h) = 1000(1-0.12)^h$ $= 1000(0.88)^h$
29	$500 = 1000(0.88)^h$ $0.5 = (0.88)^h$ $\log 0.5 = h \log 0.88$ $h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$ عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريبًا فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر
30	$S(x) = 400 + 250 \log x$ $S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$ أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 650000